ながれ44（2025）216－221

〔特集〕次世代ながれ解析

機械学習による乱流超解像解析

東北大学　大学院工学研究科　航空宇宙工学専攻　深見　開*
慶應義塾大学　理工学部　機械工学科　深潟康二
カリフォルニア大学ロサンゼルス校　工学部　機械航空宇宙工学科　平　邦彦

Super-Resolution Analysis of Turbulence with Machine Learning

*Kai Fukami, Department of Aerospace Engineering, Tohoku University
Koji Fukagata, Department of Mechanical Engineering, Keio University
Kunihiko Taira, Department of Mechanical and Aerospace Engineering, University of California, Los Angeles
*E-mail: kfukami1@tohoku.ac.jp

1　背景

超解像解析とは，画像やシグナル等における低解像データから対応する高解像データを再構築する手法である．低解像データを $\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}}$，高解像データを $\boldsymbol{q}_{\mathrm{HR}}$ とし，再構築モデル $\mathcal{F}$ および再構築データ $\widehat{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{HR}}$ を用いると，

$$\boldsymbol{q}_{\mathrm{HR}} \approx \widehat{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{HR}} = \mathcal{F}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}}) \tag{1}$$

と表現できる．この $\mathcal{F}$ として内挿法や周波数分析に基づく様々な手法が情報科学分野でこれまでに発達し，近年では深層学習を用いた超解像再構築が主となっている．もともとは画像に使われていた超解像のコンセプトは，流体力学における様々な問題設定においても一般化可能なフレームワークである[1,2]．例えば，低解像データをセンサ情報の集合体として見れば，図 1 に示すように超解像問題はスパースなセンサからの全体場再構築のような逆問題として捉えることができる．またその低解像入力 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}}$ の形は，図 2 に示すような，PIV 計測等で考えられる限られた断面計測場[3]や，吸込水槽のような産業乱流機器におけるノイズの乗った空間的に配置の限られたセンサ群[4]のように，様々な形態を取ることが可能である．更には，large-eddy simulation (LES) におけるサブグリッドスケールをグリッドスケールから推定する試みを超解像として解く場合もある[5]．

このような背景から，近年では世界中で非定常流体解析のためのツールとして，非線形機械学習に基づく超解像解析が幅広く研究されている．一方で，乱流における超解像解析は画像分野におけるそれの単なる応用ではなく，流体物理に基づく様々なノウハウを必要とする．本記事では，流体解析のための非線形機械学習超解像を，代表的なアルゴリズムやモデルの紹介，また具体例を通して解説する．

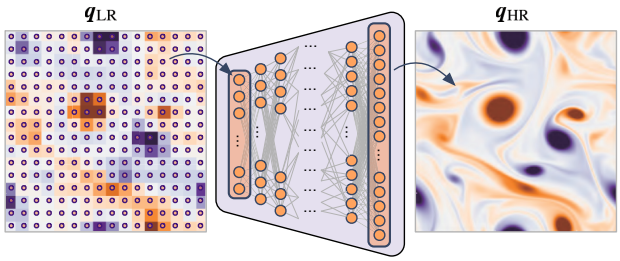

図 1　Super-resolution of turbulence.

2　乱流超解像アルゴリズム

対象とする流れ系や，扱う低解像・高解像データに応じて，適した超解像アルゴリズムを選択することが重要である．ここでは主に乱流超解像解析にて用いられるアルゴリズムを，教師あり学習，教師なし学習，および，物理に基づく半教師あり学習に大別して説明する．

2.1　教師あり学習

教師あり学習とは，訓練データとして入出力の対を与えてモデルを学習させる手法である．すなわち超解像解析においては，高解像データ $\boldsymbol{q}_{\mathrm{HR}}$ と対応する低解像データ $\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}}$ のペアを準備し，訓練データとして用意することで，機械学習再構築モデル $\mathcal{F}$ を得ることとなる．

© 2025 日本流体力学会

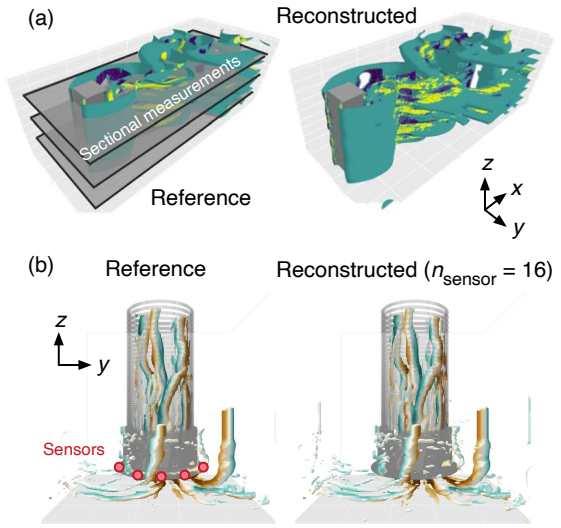

図 2　Examples of generalized super-resolution for unsteady flows. (a) Volumetric reconstruction of bluff body wake from limited sectional measurements [3]. Adapted from: Matsuo, M., Fukami, K., Nakamura, T., Morimoto, M., & Fukagata, K. *SN Comput. Sci.* 5 (2024) 306. Copyright © 2024 Authors. (b) Sparse sensor reconstruction of industrial turbulence [4].

一般にこの訓練過程は，超解像モデル $\mathcal{F}$ の重み（またはパラメータ）$\boldsymbol{w}$ に関する最適化問題，

$$\begin{aligned}\boldsymbol{w}^* &= \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{w}}\, \mathcal{E}_d(\boldsymbol{w}) \\ &= \mathrm{argmin}_{\boldsymbol{w}} ||\boldsymbol{q}_{\mathrm{HR}} - \mathcal{F}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}}; \boldsymbol{w})||_P\end{aligned} \tag{2}$$

として，データに基づく誤差 $\mathcal{E}_d$ の L_P ノルムを用いて表される．教師あり学習に基づく超解像解析が現在最も幅広く提案されており，センサ情報からの流体場再構築および逆問題推定として超解像を用いる場合によく用いられるアルゴリズムである [2,6–9]．

2.2　教師なし学習

低解像場と高解像場の対になる訓練データを準備できる場合は，教師あり学習を行うことが可能であるが，そのようなペアを準備することが難しい場合もある．例えば LES データや PIV 計測データに超解像解析を行いたい場合に，対となる高解像瞬時場を準備することは難しいだろう．そのようなケースでは瞬時場間のペアデータがなくとも，低解像流れデータ「群」と高解像流れデータ「群」の間の関係を学ぶような手法が望ましい．敵対生成ネットワーク (GAN) に基づく手法ではそのような流体場超解像が可能であり，Kim et al. [10] は Cycle GAN と呼ばれる手法を用いて，ペアデータのない場合に直接数値シミュレーションと LES のデータ群間の関係を抽出し，チャネル乱流における超解像が可能であることを示している．また追随研究として，Cycle GAN に基づく乱流超解像解析の LES 壁モデリングへの応用も報告されている [11]．このような生成超解像モデルにおける訓練プロセスも，損失関数に基づき記述が可能であり，教師あり学習同様にモデル $\mathcal{F}$ 内部の重み $\boldsymbol{w}$ に関する最適化となる．詳細な数学的記述に関しては，Fukami et al. [1] を参考されたい．

2.3　流体物理に基づく半教師あり学習

上述の教師あり・なし学習は，与えられた流れ瞬時場データペア，またはデータ群間から低・高解像データ間の関係を探るものであった．その訓練過程において超解像モデル $\mathcal{F}$ は，データに基づく損失関数 $\mathcal{E}_d$ に関する最適化を行うが，この損失関数に流体物理に基づく先見的知識を新たに誤差 $\mathcal{E}_p$ として組み込むことができる．すなわち重み付け係数 β と共に，

$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_d + \beta \mathcal{E}_p \tag{3}$$

とすることで，モデルの再構築精度およびノイズへのロバスト性を向上させることが可能である [1,12]．

流体データを扱う際には，様々な方法で $\mathcal{E}_p$ を準備することができる．例えば超解像された場である $\widehat{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{HR}} = \mathcal{F}(\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}})$ を支配方程式のオペレータ $\mathcal{N}$ に代入し，

$$\mathcal{E}_p = ||\mathcal{N}(\boldsymbol{x}, \widehat{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{HR}}(\boldsymbol{x}, t))||_p \tag{4}$$

とする方法が考えられる [12]．また流体超解像解析においては，瞬時場再構築のみが入手可能で時間微分項が得られないケース等も考えられるので，訓練過程において入手可能な項の和 $\mathcal{N}$ で誤差を構成し，

$$\mathcal{E}_p^j = ||\mathcal{N}_j(\boldsymbol{q}_{\mathrm{HR}}) - \mathcal{N}_j(\widehat{\boldsymbol{q}}_{\mathrm{HR}})||_p, \quad \mathcal{N} = \sum_j \mathcal{N}_j \tag{5}$$

とする場合もある [13]．物理に基づく誤差関数を用いて得られた超解像モデルは，データ誤差のみで得たモデルに比べて，より物理的に確かな再構築場を提供することが期待される他，より少ない訓練データ量で精度良い再構築が可能になることが知られている [1,12]．

3　機械学習モデル

上述のアルゴリズムは，幅広い非線形機械学習モデルに適用可能であり，アルゴリズムとモデルを組み合わせて乱流超解像解析を行う．ここで対象となる流れ系や入出力データの持つ自由度および複雑さに応じたモデルの選定が非常に重要である．

超解像解析のための非線形機械学習モデルとして，図 1 に示すような全結合型ネットワーク (多層パーセプトロン) [14] を用いて，低・高解像データ間の非線形関係を抽出することが考えられ，実際に様々な流れ系でその応用が見られる [5,7]．一方で，流体解析における超解像では，

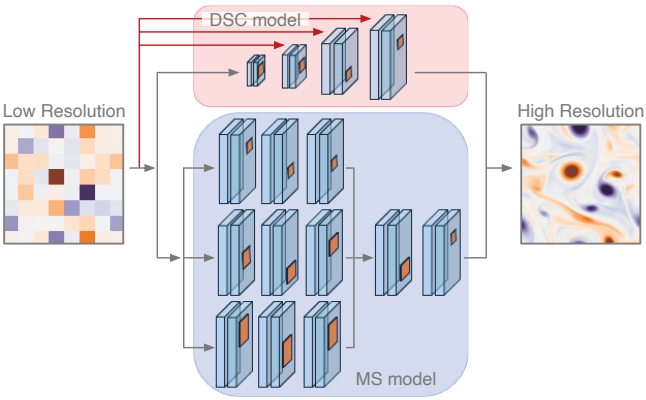

図 3　Hybrid downsampled skip-connection/multi-scale model for super-resolution reconstruction of turbulence. Adapted from: Fukami, K., & Taira, K. *J. Fluid Mech.* 1001 (2024) A32. Copyright © 2024 Authors.

固有直交分解などの縮約モデルと組み合わせない限りは [15]，低・高解像データ間の自由度の差が大きいことが一般に多い．従って，モデルがデコーダ型構造になることから，全結合型ネットワークではノード間結合数が出力層に向けて爆発的に増えることで計算コストが莫大になり，パラメータ最適化も難しくなることが知られており，これらは次元の呪いとも呼ばれる．

近年では，これらの問題を解決するために畳み込みネットワーク (CNN) [16] に基づくモデルを用いて流体データにおける超解像解析を行うことが多い．CNN は画像や動画などのデータに幅広く用いられる非線形機械学習手法の 1 つであり，多層パーセプトロンにおけるノード間結合の代わりに，視覚等の感覚神経における受容野の機能に着想を得た，フィルタ操作を用いて入出力間の非線形的な関係を学習することができる．このフィルタ操作により，全結合ネットワークに比べ計算コストを大幅に削減し回帰や分類を行うことができる．

一方で，乱流超解像解析においては，CNN に基づくモデルを構築する際に乱流の持つ非線形性およびマルチスケール性を上手く捉えるようなモデル関数を導入することが必要であることが報告されている．これまでに多様な乱流超解像のための非線形 CNN モデルが提案されているが，ここでは例として，様々な流れ系に留まらず，燃焼系を含む幅広い対象に応用が見られる，downsampled skip-connection/multi-scale (DSC/MS) モデル [2] を紹介する．

CNN に基づくこの非線形機械学習超解像手法は，図 3 に示すように大きく分けて 2 つの構造を持ち，それぞれ DSC モデルと MS モデルと呼ばれる．DSC モデル部分はデータの圧縮・拡大操作を通して，乱流のスケール普遍性を加味するようにデザインされる一方で，MS モデルは様々なサイズのフィルタ操作を組み込むことにより場における大小スケールの相互的関係を学習することを目的としている．DSC/MS モデルはあくまで乱流超解像手法の一例であるが，このような乱流における先見的知識に基づいたモデル構築は正確な再構築に必須である．さらに近年では乱流物理をうまく捉える機械学習関数を同定できるような非線形スケーリング法も提案されており [17]，それらと組み合わせた対象の系および物理に沿った超解像モデル構築が重要である．

4　例題：2 次元減衰乱流の機械学習超解像再構築

ここでは，非線形機械学習による乱流超解像再構築の具体例を紹介しよう．例題として，2 次元一様等方性減衰乱流を考える．訓練データは直接数値シミュレーション [18] によって生成され，2 次元渦度輸送方程式，

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \boldsymbol{u} \cdot \nabla \omega = \frac{1}{Re} \nabla^2 \omega \tag{6}$$

を周期境界条件下で数値積分する．ここで $\boldsymbol{u} = (u, v)$ および ω は速度ベクトルおよび渦度である．計算領域および格子点数は，$(L_x, L_y) = (1, 1)$ および $(N_x, N_y) = (512, 512)$ である．レイノルズ数は $Re \equiv u^* l^* / \nu$ と定義される．ここで u^* は特性速度，l^* は初期積分長さ，ν は動粘性係数であり，初期レイノルズ数は $Re(t_0) = 451$ とする．低解像データ $\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}}$ は平均プーリングにより生成され，16^2 格子点を持つ．また，入出力に用いる特徴ベクトル $\boldsymbol{q}$ として，渦度場 ω を使用する．従って，超解像モデル $\mathcal{F}$ は，高解像渦度場 $\boldsymbol{q}_{\mathrm{HR}} \in \mathbb{R}^{512^2}$ を低解像データ $\boldsymbol{q}_{\mathrm{LR}} \in \mathbb{R}^{16^2}$ から再構築するように訓練される．

ここでは 3 章で紹介した，CNN モデルおよび DSC/MS モデルに対し，2 章にて議論した通常の教師あり学習アルゴリズムおよび支配方程式に基づく半教師あり学習アルゴリズムを適用した，計 4 つの超解像再構築手法を減衰乱流の低解像データに適用する [1]．支配方程式に基づく半教師あり学習としては，式 (5) にて紹介した訓練過程において計算可能な項に基づく誤差を考え，式 (6) の渦度輸送方程式から，左辺の非線形項と右辺の線形項を $\mathcal{E}_p$ として導入する．したがって，答えとなる物理量 $(\cdot)_{\mathrm{DNS}}$ および再構築結果から得られた量 $(\cdot)_{\mathrm{ML}}$ に基づき，

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &= \mathcal{E}_d + \beta_{\mathrm{adv}} \mathcal{E}_{\mathrm{adv}} + \beta_{\mathrm{visc}} \mathcal{E}_{\mathrm{visc}}, \quad \text{where} \\ \mathcal{E}_d &= ||\omega_{\mathrm{DNS}} - \mathcal{F}(\omega_{\mathrm{LR}})||_2, \\ \mathcal{E}_{\mathrm{adv}} &= ||\boldsymbol{u}_{\mathrm{DNS}} \cdot \nabla \omega_{\mathrm{DNS}} - \boldsymbol{u}_{\mathrm{ML}} \cdot \nabla \omega_{\mathrm{ML}}||_2, \\ \mathcal{E}_{\mathrm{visc}} &= ||\nabla^2 \omega_{\mathrm{DNS}} - \nabla^2 \omega_{\mathrm{ML}}||_2, \end{aligned} \tag{7}$$

としたものを誤差関数とする．また追加項の重み係数は，$\beta_{\mathrm{adv}} = \beta_{\mathrm{visc}} = 0.1$ とする．より詳細な設定に関しては，Fukami et al. [1] を参考されたい．

4 つの非線形機械学習手法を用いた渦度場の超解像再構築の結果を図 4 に示す．通常の CNN モデルを用いた

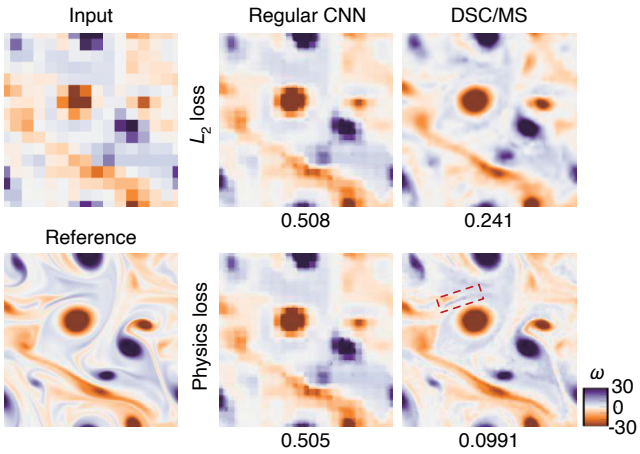

図 4　Machine-learning-based super-resolution reconstruction of two-dimensional isotropic turbulence [1]. The L_2 error norms are reported underneath. Adapted from: Fukami, K., Fukagata, K., & Taira, K. *Theor. Comput. Fluid Dyn.* 37 (2023) 421-444. Copyright © 2023 Authors.

際には，誤差関数に依らず再構築は上手くいかず，入力の粗いデータに影響されることで，空間的に不連続な場を示す．一方で，DSC/MS モデルを用いることで再構築が大幅に改善し，L_2 再構築誤差ノルム $\varepsilon = ||\omega_{\mathrm{DNS}} - \mathcal{F}(\omega_{\mathrm{LR}})||_2/||\omega_{\mathrm{DNS}}||_2$ に関して約 50%から 24.1%へと削減される．さらに物理に基づく誤差を導入することで，その超解像再構築はさらに精度を増す．再構築場上に点線にて強調しているように，負の渦度を持つ大きな構造の周りに介在する剪断層のような非常に微細な構造を再現することが可能になり，その再構築誤差は 10%以下となる．

DSC/MS モデルと支配方程式に基づく誤差関数を組み合わせたケースの再構築は，他ケースと比べ，図 5 に示すエネルギースペクトルの比較からも確認できるように，波数空間においても結果は良好である．一方で

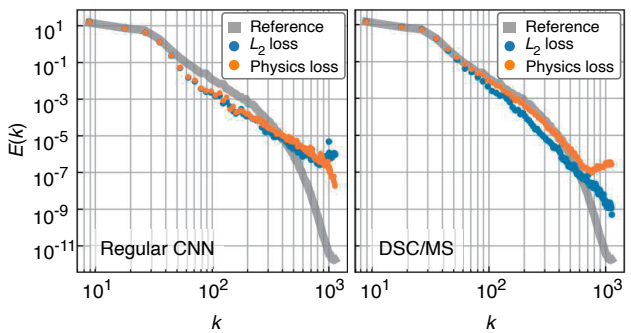

図 5　Kinetic energy spectrum $E(k)$ of reconstructed isotropic vorticity fields shown in figure 4.

$k > 600$ の高波数領域においては，散逸域と慣性域の相関の低さを理由に再構築は上手くいかず，このような高波数領域においても統計的にもっともらしい再構築場を得る手法としては，2.2 節で紹介した生成系アルゴリズムが有効であることが知られている [10]．また高次統計量を直接 $\mathcal{E}_p$ に導入する方法もあり [19]，目的に応じたアルゴリズムやモデルの設定により，物理的に確かな超解像再構築場を得ることが可能である．

5　結論・展望

本解説では，非線形機械学習に基づく乱流超解像解析について，その幅広い流体場再構築逆問題への一般化や，代表的なアルゴリズム・モデルの紹介，加えて再構築の具体例を通した議論を行った．今回触れた例題では，2 次元流れ場の空間場再構築を取り扱ったが，非線形機械学習超解像再構築の時間方向への拡張や 3 次元場への応用も盛んに議論されている [1,6,20]．また同様の機械学習超解像手法およびコンセプトは，気象データをはじめとする大規模複雑系の解析にも応用が行われており [21–23]，今後も強力な非線形流体場再構築ツールとしての更なる発展が期待される．

非定常流体現象を扱うという観点において，大小スケール間の関係を超解像解析にて抽出することに加え，再構築手法にダイナミクスを取り入れることも重要になると考えられる．既に損失関数にダイナミクスを取り込むケースや [24]，データ同化と組み合わせることで動的な情報を再構築プロセスに取り入れる手法 [25] が提案され始めている．またデータ駆動型モデルに基づく手法であるが故に，データの質，量 [26]，およびモデル設定 [27] から起因する不確かさが常に超解像解析には伴うので，それらの適切な定量化も重要であろう．

また超解像解析に限る話ではないが，非線形機械学習を用いた乱流解析における訓練データの準備の仕方にも注意する必要がある．例えば，図 6(a) に示すような減衰乱流における 1 枚のスナップショットを例にとると，これはただ 1 つの瞬時場である一方で，幅広い長さスケールの渦構造および様々な回転・剪断のパターンが凝縮された，いわば物理の宝庫であると言える．言い換えれば，乱流データに含まれる情報量は，一般の画像解析で扱われるような顔画像などのデータフレームと比べて，同じ “1 枚”のスナップショットでも格段に多く，それを念頭に置いたデータ準備やサンプリングを行う必要が示唆される．最近の研究では，本記事でも紹介した DSC/MS モデルにおける超解像解析の訓練データを，図 6(a) に示すようにサブサンプリングし訓練データを準備することで，元データがたった 1 枚の瞬時場であったとしても，図 6(b) に示す通り，精度よく再構築できることが報告されている [28]．このように一見限ら

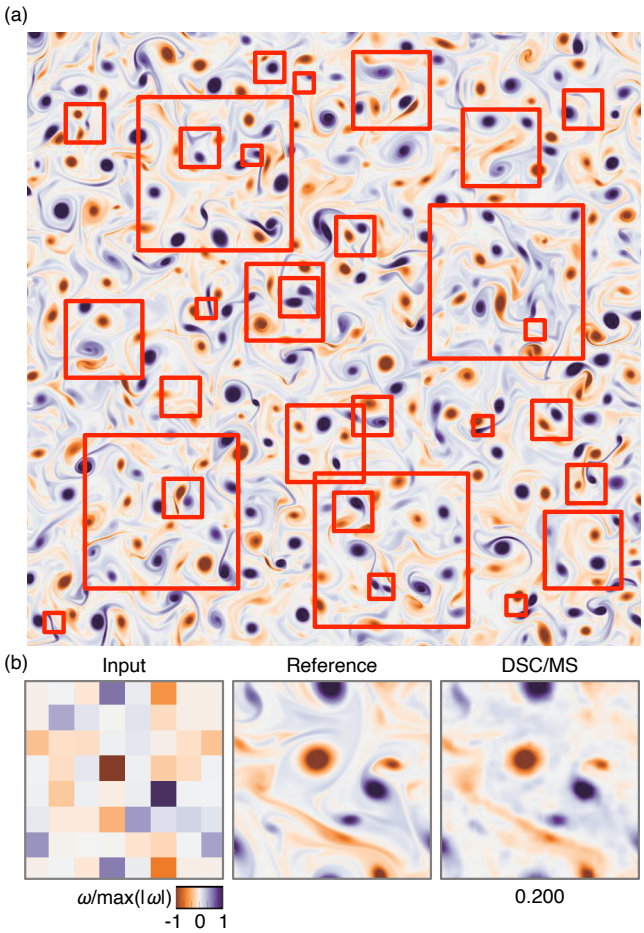

図 6　Single-snapshot machine learning for turbulence super-resolution [28]. (a) A single vortical flow snapshot and red subdomains used for training. (b) Example vortical flow super-resolved by the DSC/MS model trained with the proposed single-snapshot routine. The L_2 error norm is reported underneath the contour of the reconstructed field. Adapted from: Fukami, K., & Taira, K. *J. Fluid Mech.* 1001 (2024) A32. Copyright © 2024 Authors.

れた乱流データからでも，そこに詰まっている物理を搾り取るようなスマートなデータ収集を通して，特徴抽出が可能であることに注意し，乱流データの無駄遣いをしないことを常に念頭に置いた非線形機械学習解析が望まれる．

最後に，近年では様々な非定常乱流データをオープンソース化し，コミュニティ内で共有するような動きもあることから [29,30]，様々なデータ（例えば数値データと実験計測）を統合し共通の特徴を抽出する，データ融合に基づく超解像再構築も今後の展開として考えられるだろう [31]．一般に，数値データに比べ実験計測で入手できる流体データのレイノルズ数は高いことが多く，これらを上手く扱えれば幅広いレイノルズ数帯の複雑流動場にロバストな，より一般化された非線形機械学習超解像解析が可能になるかもしれない．ここには書ききれない，非線形機械学習に基づく乱流超解像解析の無数の展望に期待を膨らませ，本記事の結びとする．

謝辞

本特集で紹介した研究の一部は，JSPS 科研費基盤研究 (18H03758, 21H05007，慶大・深潟)，および，Air Force Office of Scientific Research (FA9550-21-1-0178, UCLA・平)，Vannevar Bush Faculty Fellowship (N00014-22-1-2798，UCLA・平) の助成を受けたものである．また本特集における議論は，共同研究者の方々とこれまでの議論に基づくものである．とくに，後藤 晋先生 (大阪大学)，安 炳辰博士 (荏原製作所)，Prof. Romit Maulik (Pennsylvania State University) の各氏に深く感謝申し上げる．

引用文献

1) Fukami, K., Fukagata, K., & Taira, K.: Super-resolution analysis via machine learning: a survey for fluid flows, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 37 (2023) 421-444.
2) Fukami, K., Fukagata, K., & Taira, K.: Super-resolution reconstruction of turbulent flows with machine learning, *J. Fluid Mech.*, 870 (2019) 106-120.
3) Matsuo, M., Fukami, K., Nakamura, T., Morimoto, M., & Fukagata, K.: Reconstructing three-dimensional bluff body wake from sectional flow fields with convolutional neural networks, *SN Comput. Sci.*, 5 (2024) 306.
4) Fukami, K., An, B., Nohmi, M., Obuchi, M., & Taira, K.: Machine-learning-based reconstruction of turbulent vortices from sparse pressure sensors in a pump sump, *J. Fluids Eng.*, 144 (2022) 121501.
5) Maulik, R., & San, O.: A neural network approach for the blind deconvolution of turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 831 (2017) 151-181.
6) Fukami, K., Fukagata, K., & Taira, K.: Machine-learning-based spatio-temporal super resolution reconstruction of turbulent flows, *J. Fluid Mech.*, 909 (2021) A9.
7) Erichson, N. B., Mathelin, L., Yao, Z., Brunton, S. L., Mahoney, M. W., & Kutz, J. N.: Shallow neural networks for fluid flow reconstruction with limited sensors, *Proc. Roy. Soc. A*, 476 (2020) 20200097.
8) Fukami, K., Maulik, R., Ramachandra, N., Fukagata, K., & Taira, K.: Global field reconstruction from sparse sensors with Voronoi tessellation-assisted deep learning, *Nat. Mach. Intell.*, 3 (2021) 945-951.

9) Zhong, Y., Fukami, K., An, B., & Taira, K.: Sparse sensor reconstruction of vortex-impinged airfoil wake with machine learning, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 37 (2023) 269-287.
10) Kim, H., Kim, J., Won, S., & Lee, C.: Unsupervised deep learning for super-resolution reconstruction of turbulence, *J. Fluid Mech.*, 910 (2021) A29.
11) Maejima, S., & Kawai, S.: Unsupervised and supervised machine learning pipeline for super-resolution-based sub-grid scale modeling in coarse-grid large-eddy simulations, *J. Fluid Mech.*, 1013 (2025) A28.
12) Raissi, M., Perdikaris, P., & Karniadakis, G. E.: Physics-informed neural networks: A deep learning framework for solving forward and inverse problems involving nonlinear partial differential equations, *J. Comput. Phys.*, 378 (2019) 686-707.
13) Lee, S., & You, D.: Data-driven prediction of unsteady flow over a circular cylinder using deep learning, *J. Fluid Mech.*, 879 (2019) 217-254.
14) Rumelhart, D. E., Hinton, G. E., & Williams, R. J.: Learning representations by back-propagating errors, *Nature*, 323 (1986) 533-536.
15) Nair, N. J., & Goza, A.: Leveraging reduced-order models for state estimation using deep learning, *J. Fluid Mech.*, 897 (2020) R1.
16) LeCun, Y., Bottou, L., Bengio, Y., & Haffner, P.: Gradient-based learning applied to document recognition, *Proc. IEEE*, 86 (1998) 2278-2324.
17) Fukami, K., Goto, S., & Taira, K.: Data-driven nonlinear turbulent flow scaling with Buckingham Pi variables, *J. Fluid Mech.*, 984 (2024) R4.
18) Taira, K., Nair, A. G., & Brunton, S. L.: Network structure of two-dimensional decaying isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, 795 (2016) R2.
19) Yousif, M. Z., Zhang, M., Yu, L., Vinuesa, R., & Lim, H.: A transformer-based synthetic-inflow generator for spatially developing turbulent boundary layers, *J. Fluid Mech.*, 957 (2023) A6.
20) Fukami, K., Fukagata, K., & Taira, K.: Assessment of supervised machine learning methods for fluid flows, *Theor. Comput. Fluid Dyn.*, 34 (2020) 497-519.
21) Onishi, R., Sugiyama, D., & Matsuda, K.: Super-resolution simulation for real-time prediction of urban micrometeorology, *SOLA*, 15 (2019) 178-182.
22) Yasuda, Y., Onishi, R., & Matsuda, K.: Super-resolution of three-dimensional temperature and velocity for building-resolving urban micrometeorology using physics-guided convolutional neural networks with image inpainting techniques, *Build. Environ.*, 243 (2023) 110613.
23) Yasuda, Y., & Onishi, R.: Spatio-temporal super-resolution data assimilation (SRDA) utilizing deep neural networks with domain generalization, *J. Adv. Model. Earth Syst.*, 15 (2023) e2023MS003658.
24) Page, J.: Super-resolution of turbulence with dynamics in the loss, *J. Fluid Mech.*, 1002 (2025) R3.
25) He, C., Zeng, X., Wang, P., Wen, X., & Liu, Y.: Four-dimensional variational data assimilation of a turbulent jet for super-temporal-resolution reconstruction, *J. Fluid Mech.*, 978 (2024) A14.
26) Maulik, R., Fukami, K., Ramachandra, N., Fukagata, K., & Taira, K.: Probabilistic neural networks for fluid flow surrogate modeling and data recovery, *Phys. Rev. Fluids*, 5 (2020) 104401.
27) Morimoto, M., Fukami, K., Maulik, R., Vinuesa, R., & Fukagata, K.: Assessments of epistemic uncertainty using Gaussian stochastic weight averaging for fluid-flow regression, *Phys. D*, 440 (2022) 133454.
28) Fukami, K., & Taira, K.: Single-snapshot machine learning for super-resolution of turbulence, *J. Fluid Mech.*, 1001 (2024) A32.
29) Li, Y., Perlman, E., Wan, M., Yang, Y., Meneveau, C., Burns, R., Chen, S., Szalay, A., & Eyink, G.: A public turbulence database cluster and applications to study Lagrangian evolution of velocity increments in turbulence, *J. Turb.*, 9 (2008) N31.
30) Towne, A., Dawson, S. T. M., Brès, G. A., Lozano-Durán, A., Saxton-Fox, T., Parthasarathy, A., Jones, A. R., Biler, H., Yeh, C.-A., Patel, H. D., & Taira, K.: A database for reduced-complexity modeling of fluid flows, *AIAA J.*, 61 (2023) 2867-2892.
31) Fukami, K., & Taira, K.: Observable-augmented manifold learning for multi-source turbulent flow data, *J. Fluid Mech.*, 1010 (2025) R4.