

雲乱流と計算科学

名古屋工業大学, 慶應義塾大学

名古屋工業大学

名古屋工業大学

後藤 俊幸*

渡邊 威泉

齋藤 泉

Cloud Turbulence and Computational Science

*Toshiyuki Gotoh, Nagoya Institute of Technology, Keio University

Takeshi Watanabe, Nagoya Institute of Technology

Izumi Saito, Nagoya Institute of Technology

*E-mail : gotoh.toshiyuki@nitech.ac.jp

1 はじめに

雲は日々目にするありふれた自然現象であるが、降雨を通して食料生産や経済活動に影響を及ぼすだけでなく、集中豪雨や台風などの自然災害により生命の安全にも直接関わる。しかし、実験や観測の困難さから雲粒子生成から雨粒子形成に至る過程、雲粒子の成長・消滅あるいは多数の雲集団の形成などについての我々の理解はいまだ不十分である。雲と雲集団の大気現象では μm 以下のエアロゾルを核とする雲粒子生成から数千 km に及ぶ高低気圧の力学まで空間スケール比が 10^{12} 以上にもわたる¹⁾。大気中のエアロゾル、乾燥空気・湿潤空気、温度は乱流により輸送混合されると同時に数千 km から 1mm 程度まで様々なスケールを持った複雑な揺らぎを生じる。一方、雲粒子は凝縮により成長し衝突合体を経て雨粒子にまで大きくなって降雨に至る。潜熱の出入りおよび雲粒子との摩擦抵抗により乱流は小さなスケールでかく乱を受け、そのかく乱は巨視的なスケールにまでに成長する²⁻⁴⁾。このようにして乱流と雲粒子は非線形・非平衡状態にある複雑な巨大自由度の系を構成する。このような系を我々は「雲乱流」と呼んで、その基本的性質の解明に取り組んできている(図1)。もとより、雲乱流全体は巨大なスケール比をもつ現象であり、その全体をまるごと取り扱うことはできない。従来からの雲あるいは雲集団の研究で行われてきたやり方では巨視的スケールでの雲と流体との関連に関心が向けられている。数値シミュレーションにおける空間格子サイズは数 10 km から数 100 km 程度であり、それ以下のサイ

ズの現象はモデル(乱流では Large Eddy Simulation, LES) ないしはパラメータとして取り扱われてきた。一方、エアロゾルを核とする雲粒子生成、過飽和度に応じた雲粒子の凝結成長(蒸発消滅)、雲粒子の衝突併合(分裂)過程は特徴的スケールが cm 以下の雲マイクロ物理と呼ばれる研究分野であり多くの研究がこれまでなされてきている。しかし雲マイクロ物理過程における乱流との相互作用の詳細についての理解は十分ではなく、雲マイクロ物理過程のスケール(cm 以下)と雲全体の運動の最小スケール(数 10 km あるいは数 100 km) との間の現象についての我々の知識にスケールギャップがある(現象にスケールギャップがあるとは限らない)。雲粒子集団を仮想的な超水滴とみなしてその動力学と乱流との相互作用

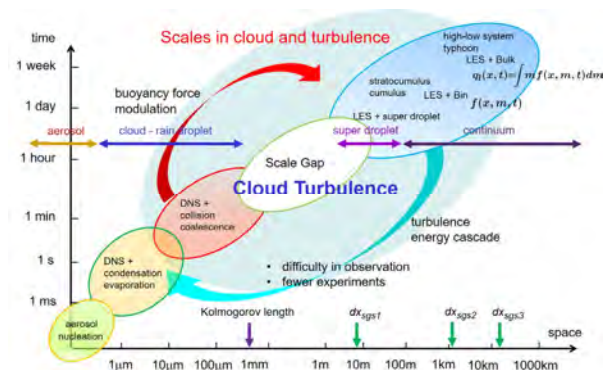


図1 大気、雲、エアロゾル、雲乱流の時空間スケール

をセミマクロ的な仕方で記述する島らによる画期的な超水滴法 (Super Droplet Method, SDM) が開発されているが⁵⁾, 乱流と雲粒子との相互作用の微視的な視点からのアプローチはいまだ少ない⁶⁻⁸⁾.

雲粒子とそれらを輸送・混合する乱流との相互作用はこの領域で生起するのであるから, この知識のスケールギャップを埋めていくことが必要である. このような考えから, (1) 微視的スケールから巨視的スケールに向かって, (2) 微視的なスケールまでの乱流の詳細と少数だが素性の明瞭な雲粒子の動力学を取り込んで, 雲粒子と乱流との相互作用の詳細の解明を目指してきた. 雲粒子の生成・成長・衝突併合などは雲粒子周辺の流れ場の詳細に強く影響を受けることが推測されるので, 乱流場はコルモゴロフスケールまで正直に解くことが求められる (Direct Numerical Simulation, DNS). その代わりに最大のスケールは1つの雲全体から見るとかなり小さく乱流レイノルズ数も小さい. しかし雲粒子と乱流との相互作用は詳細に調べることができる. 実験・観測では難しい現象の解明に向けて微視的な視点に立った第1原理的視点からのコンピュータシミュレーションを用いた計算科学的手法はこのスケールギャップを埋める有効な手段と考えている. さらにこの研究から乱流の謎の解明に向けて新たな視点とヒントが得られることを期待している.

2 雲粒子成長の問題設定

扱う対象は, 水蒸気・温度, 極めて多数の微小水滴 (半径約 $10\mu\text{m}$ 程度) 集団, そしてこれらを輸送混合する乱流であり, 時間にして約10分から20分程度, 空間スケールは数 μm から約 1m 程度までが対象である.

雲粒子周囲の空気とは蒸発・凝縮に伴う熱と水蒸気の入りと雲粒子に働く流体抵抗を通して相互作用するので, 乱流場はコルモゴロフ長さ η (約 $500\mu\text{m}$) 以下の運動まで解像されねばならない. 一方, 雲粒子半径は η より約1桁以上小さいので雲粒子と乱流との間には空間的なスケール分離があるとして雲粒子を質点として扱う. 一方, 雲粒子の重力沈降速度 v_s と乱流の u' は同程度になることがあるため, CFL 条件 $\max(v_s, u')\Delta t < \Delta x$ を考慮すると時間刻み幅についてはスケール分離がないとして扱う必要がある.

熱帯海洋上空の層積雲中の中心部に一辺 L (約 1m) の立方体 (セル) を導入し, このセル中の乱流・水蒸気・温度・雲粒子集団を考える (図2)⁹⁾. 鉛直方向 (z 軸) に温度と水蒸気混合比の一般的な平均勾配が

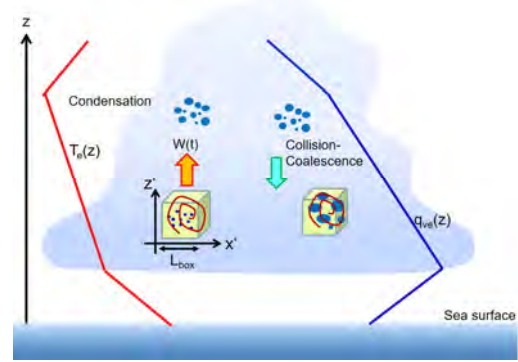


図2 雲中を上昇気流により移動するセル⁹⁾

あるとする. このセルは水蒸気の変化するに伴う潜熱により鉛直方向に速度 $W(t)$ で運動する. このセルに固定した局所座標系 \hat{x} は海面に固定した座標系 \mathbf{X} とはガリレイ変換により結び付けられる.

$$\mathbf{x} = \hat{\mathbf{x}} + \int_0^t \mathbf{W}(s) ds \mathbf{e}_z = \hat{\mathbf{x}} + \mathbf{H}(t)\mathbf{e}_z, \quad \mathbf{u} = \hat{\mathbf{u}} + \mathbf{W}(t) \quad (1)$$

流体の方程式にはブシネスク近似による浮力に加えて見かけ上の加速度 $-dW/dt \mathbf{e}_z$ が加わる. セル内の乱流は統計的に一様でありセル内の平均速度が0という要請から, セルの鉛直方向速度は浮力の体積平均の時間積分として与えられる.

$$\frac{d\hat{\mathbf{u}}}{dt} = \left(\bar{B} - \frac{dW}{dt} \right) \mathbf{e}_z = 0 \rightarrow \mathbf{W}(t) = \mathbf{W}(0) + \int_0^t \overline{B(s)} ds \quad (2)$$

セル内の流体速度 $\hat{\mathbf{u}}$, 温度 θ , 水蒸気混合比 q_v の方程式は以下のようなになる^{6,7)}.

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{u}}}{\partial t} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{u}} = -\hat{\nabla} \hat{p} + \nu \hat{\nabla}^2 \hat{\mathbf{u}} + (B - \bar{B}) \mathbf{e}_z + \mathbf{f} \quad (3a)$$

$$\hat{\nabla} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0 \quad (3b)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} \theta = \kappa \hat{\nabla}^2 \theta + \frac{L}{c_p} (C_d - \bar{C}_d) - \Gamma(t) \hat{u}_3 \quad (4)$$

$$\frac{\partial q_v}{\partial t} + \hat{\mathbf{u}} \cdot \hat{\nabla} q_v = \kappa \hat{\nabla}^2 q_v - (C_d - \bar{C}_d) \quad (5)$$

ここで \mathbf{f} , L , c_p , Γ はそれぞれ外力, 潜熱, 空気の定圧比熱, 平均温度勾配である. 浮力 B , 凝結率 C_d , 雲水混合比 q_l , 過飽和度 s はそれぞれ

$$B = g \left(\frac{T(\hat{\mathbf{x}}, t) - T_e(\mathbf{H}(t))}{T_e(\mathbf{H}(t))} + 0.61(q_v(\hat{\mathbf{x}}, t) - q_{ve}(\mathbf{H}(t))) - q_l(\hat{\mathbf{x}}, t) \right) \quad (6)$$

$$C_d(\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{1}{m_{air}} \frac{dm_l(\hat{\mathbf{x}}, t)}{dt} = \frac{4\pi \rho_l K N_{\Delta}(\hat{\mathbf{x}}, t)}{\rho_a(\Delta \hat{\mathbf{x}})^3} \sum_{k=1}^{N_{\Delta}(\hat{\mathbf{x}}, t)} R_j(t) s(\hat{\mathbf{X}}_j + \mathbf{H}(t)\mathbf{e}_z, t) \quad (7)$$

$$q_l(\hat{\mathbf{x}}, t) = \frac{M_l}{M_a} = \frac{4\pi \rho_l}{3\rho_a \Delta \hat{\mathbf{x}}^3} \sum_{j=1}^{N_{\Delta}(\hat{\mathbf{x}}, t)} R_j^3(t) \quad (8a)$$

$$s = \frac{q_v}{q_{vs}} - 1 \quad (8b)$$

で与えられる. ここで q_{vs} は飽和水蒸気混合比である. 一方, j 番目の雲粒子の運動方程式と半径 R_j は以下の式により記述される.

$$\frac{d\hat{X}_j}{dt} = \hat{V}_j(t) \quad (9)$$

$$\frac{d\hat{V}_j}{dt} = \frac{1}{\tau_j(t)} (\hat{u}(\hat{X}_j(t), t) - \hat{V}_j(t)) - \left(g + \frac{dW}{dt}\right) e_z \quad (10)$$

$$R_j(t) \frac{dR_j(t)}{dt} = Ks(X_j(t), t) \quad (11)$$

τ_j はレイノルズ数に依存した抵抗係数による特性時間, K は過飽和度の拡散係数である. 最後の式から過飽和度 s が正 (負) なら粒子半径が成長 (減衰) することが見て取れる.

雲中にセルを固定して計算した場合, 凝結成長するには絶えず外部から水蒸気を供給し続ける必要がある. 一方, 上昇気流に乗って鉛直方向に移動するセルを導入することにより, 高度によって周囲の気温・水蒸気混合比の平均的な環境変化 (高くなれば気温が下がり, 飽和水蒸気圧が下がって過飽和度が正の状態を維持できる) を自然な取り込むことができ, 雲粒子の凝結成長に引き続く衝突併合過程の開始までより自然に計算できると期待できる.

3 数値計算

雲乱流のレイノルズ数 R_λ は極めて高く, 雲粒子数も膨大である. 実際の値での計算は不可能であるものの, スパコンの能力を最大限用いて巨大な数の雲粒子を伴う雲乱流の大規模 DNS を行うことは, 計算科学において非常に挑戦的な課題である. ここでは, 先に述べた方程式を数値積分する際のいくつかの要点を簡潔にまとめる^{9,10}.

乱流場は 3 方向周期境界条件のもとでフーリエスペクトル法を用いた. 空間 2 次元分割による 3 次元 FFT を使い, MPI と OpenMP を用いて通信とバタフライ演算をオーバーラップさせて通信の隠蔽を図っている. 雲粒子と乱流場との相互作用の計算には線形補間を用いた. また, 雲粒子同士の衝突・併合計算においては, 各プロセスが担当する空間領域をさらに小領域に分割したうえで, 1 つの小領域を取り囲む 27 の小領域内の雲粒子ペアについてのみ衝突判定を行う. この判定のためには, 前もって各雲粒子がどの小領域に属するかのラベリングを行う必要があり, このためにセルインデックス法を用い並べ替えた. 衝突・併合においては質量・運動量が保存するようにした. $[t, t + \Delta t]$ の間で 2 つの雲粒子の軌跡間距離が両者の半径の合計より小さい場合に限り確率 1 で併合させた. Δt は約 0.5ms であり, 以下に示す計算では, 格子点数 512^3 , 粒子数 1,600 万個, 乱流レイノルズ数 $R_\lambda=167$ の計算を行い, 約 10 分の計算に 8,192 core, 240 万ステップ ($1,333T_L$, T_L は巨

視的渦回転時間), 約 100 時間を要した. このようにして開発された雲乱流コードを Cloud Turbulence Simulator (CTS) と名付けて, 現在まで様々な計算を行い改良を重ねてきている¹⁰.

4 計算結果

4.1 雲粒径分布関数

ハワイ沖での温度・水蒸気混合比の観測データをもとにした環境で¹¹, 体積 $(51.2 \text{ cm})^3$ のセルを初期高度 500m, 初期鉛直速度 0 m/s で置いた. セル内には平均半径 $10 \mu\text{m}$, 偏差 $3 \mu\text{m}$ の雲粒子を $125/\text{cm}^3$ の数密度で注入した¹⁰. 約 1 分の間にセルは約 2,400 m まで上昇し, 最大上昇速度は約 7.5m/s に達した.

雲粒子の成長を最もよく表すのは, 雲粒径分布関数である. 図 3 は雲粒子半径を横軸にとって, その分布関数の時間変化を示したものである. 初期に平均半径 $10 \mu\text{m}$ の雲粒子が凝結により成長し, 6 分を超えると衝突・併合過程により急速に右側の裾野が伸び始める. やがて第 2 ピークが現れ成長し, 9 分後には平均質量半径が約 $100 \mu\text{m}$, 最大質量半径約 $500 \mu\text{m}$ の雨粒子が現れる. また, レイノルズ数の増大とともに雲粒子の成長が促進される. Berry と Reinhardt によるモデル方程式に基づいた雲粒子質量分布関数の計算があるが¹², 第 1 原理計算で乱流混合, 凝縮成長, 衝突併合による雲粒子から雨粒子形成までを含む粒径分布関数の連続的時間発展を計算した他の研究は見当たらない. この論文は発表直後 Nature in Physics の Research highlight として取り上げられた¹³

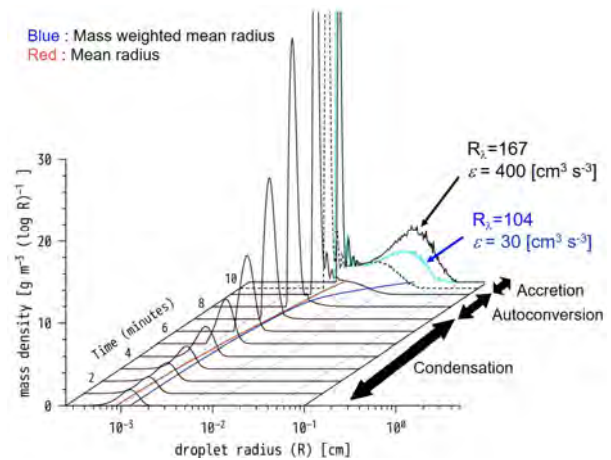


図 3 雲粒子半径分布の時間変化. 8 分を過ぎたあたりから分布の右すそ野が広がり始め, 9 分頃には第 2 のピークが成長する¹⁰.

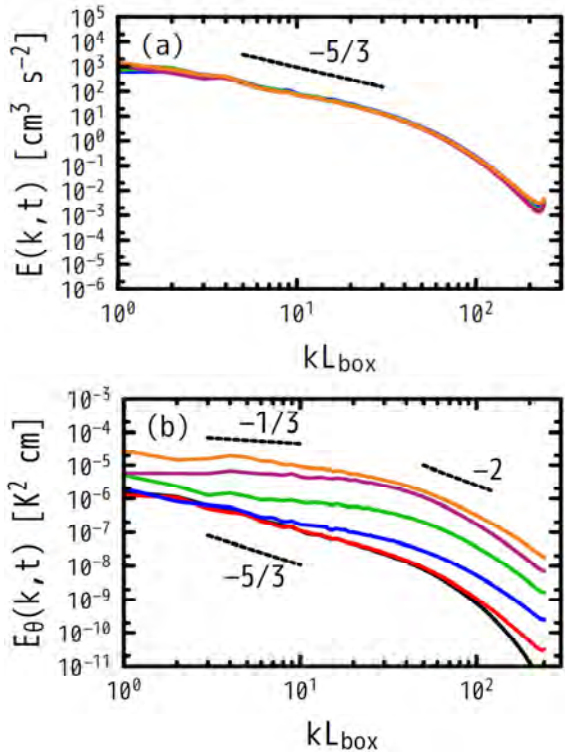


図4 雲乱流中の (a) 運動エネルギー $E(k, t)$ と (b) 温度揺らぎ分散スペクトル $E_\theta(k, t)$ の時間変化. 時間とともに曲線は下から上に向かって変化し, 一時 $E_\theta(k, t) \propto k^{-5/3}$ に近いスペクトルが低波数側で観測されるが高波数側から次第に変形をうけ低波数側に伝搬していく¹⁰⁾.

4.2 乱流スペクトル変調

乱流場はどうか? 図4は運動エネルギーと温度揺らぎ分散スペクトルの時間変化を示したものである. 運動エネルギーは低波数側でランダムな外力により励起されており, 低波数側で $E(k, t) \propto k^{-5/3}$ の定常状態が維持されている一方, 温度揺らぎスペクトルは一時 $E_\theta(k, t) \propto k^{-5/3}$ に近いスペクトルを持つが, やがて散逸領域から変形が始まり, 時間経過とともに低波数側へ伝搬していくのが見て取れる. 温度揺らぎの式にある凝結項からの寄与は, 雲粒子周辺の水蒸気の変相によるものであるから, 雲粒子によって温度揺らぎが変形をうけると理解するのが自然である. しかし, この変形が波数空間全体あるいは有限の波数区間内にとどまるのかは不明であり, いまだその答えは得られていない.

4.3 ショットノイズ

雲粒子の数密度分布や雲水混合比 (Liquid water content, LWC) は雲粒子が担う特性量であり, さらに相変化を通じて応答する雲粒子近傍の過飽和度や温度ゆらぎの統計法則を知る事は雲マイクロ物理の理

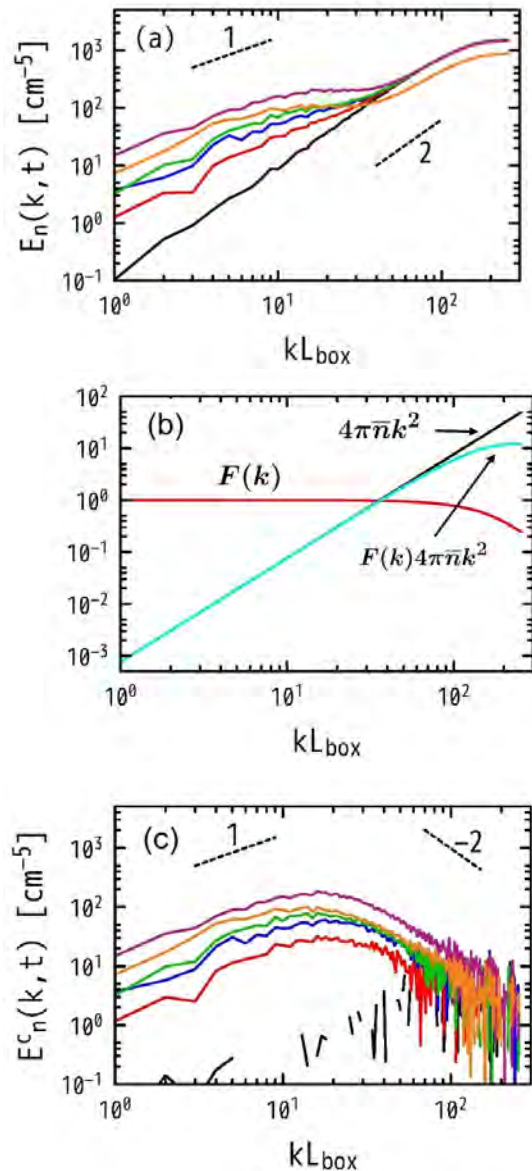


図5 雲粒子数密度揺らぎのスペクトル¹⁰⁾.

(a) 生のスペクトル, (b) 粗視化されたショットノイズスペクトルとフィルター関数 $F(k)$, (c) ショットノイズスペクトルを除去した数密度スペクトル.

解・モデル・予測に極めて重要である. 雲粒子の軌跡はラグランジュ的に追跡され, 粒子位置における上記物理量は周囲の流体格子点上に線形または高次補間で分配され, その時刻の場の量として表すことができる. しかし, この分配計算は空間格子サイズ Δx 以下の情報を粗視化して表現することにはほかならない. このため, 格子幅が有限であることからスペクトルは最大波数近傍で本来のものとは異なるはずである. 具体例として, 雲粒子の数密度の揺らぎを考えてみよう. 図5(a)は雲粒子数密度揺らぎについて何も加工しないで計算したスペクトルである. 低波数側ではスペクトルの傾きは1に近いが, 高波

数側では傾きが2になり右端で平坦になる．当初，このスペクトルは正しいのか皆目見当がつかず随分と頭を悩ませた．ある時，「そういえば溶液中の粒子数の揺らぎについてランダウ・リフシッツの統計物理学の本に何か記載があったなあ」と思い当たり調べてみると，うれしいことにそこに大きなヒントがあった¹⁴⁾．粒子数の揺らぎを $\tilde{n} = n - \bar{n}$ (\bar{n} は平均値)とすると \tilde{n} の相関は

$$\begin{aligned} \langle \tilde{n}(x+r, t) \tilde{n}(x, t) \rangle &= \langle n(x+r, t) n(x, t) \rangle - \bar{n}^2 \\ &= \bar{n}^2(t) g(r) + \bar{n}(t) \delta(r) \end{aligned} \quad (12)$$

と表される．右辺第1項の $g(r)$ は粒子の動径分布関数と呼ばれ粒子間相関を表す．第2項目は2つの粒子が同じ微小体積に入り込む場合に相当する． $\delta(r)$ があるということは，そのフーリエ変換は定数であり3次元波数空間内の波数シェルスペクトルは $4\pi k^2 \bar{n}$ になる．このスペクトルは粒子の離散性によるものでショットノイズと呼ばれるものである．このことから図5(a)の高波数側の k^2 に沿ったスペクトルはショットノイズであることがわかる．

このショットノイズの性質を応用すると，意外にも粒子属性(温度，質量など)を周囲の流体格子点へ分配する際に生じる数値計算上の誤差評価が得られる．今，領域内に多数の質点粒子を一様乱数に従って分布させたとして厳密にスペクトルを計算したのなら，ショットノイズスペクトルは $E_s(k) = 4\pi k^2 \bar{n}$ になるはずである．しかし，流体格子点で粗視化するために $4\pi k^2 \bar{n}$ スペクトルは右端で平坦になる．従って，測定された粗視化されたショットノイズスペクトル $E_{ns}(k)$ と本来のショットノイズスペクトル $4\pi k^2 \bar{n}$ との比 $F(k) = E_{ns}(k)/E_s(k)$ から粗視化に伴うフィルター関数が推定できる(図5(b))．そして，本来の数密度揺らぎスペクトルは

$$E_n(k) = F^{-1}(k) E_n^{\text{raw}}(k) - E_n^{\text{shot}}(k) \quad (13)$$

により求められ，その結果が図5(c)である．高波数側ではかなりノイズが目立つが，スペクトルは波数とともに減少する．このスペクトルは粒子位置を直接フーリエ変換した松田らの結果とも一致する⁸⁾．

ショットノイズを利用した粗視化に伴う空間フィルターの数値的構成方法の発見は，その後の雲粒子属性(LWCなど無限大シュミット数のスカラー揺らぎのスペクトル)の解析に大いに役立っている¹⁵⁾．

5 検証

図3の結果は定性的にはこれまでの予想とおおむね一致しており一見よさそうに見える．しかし，こ

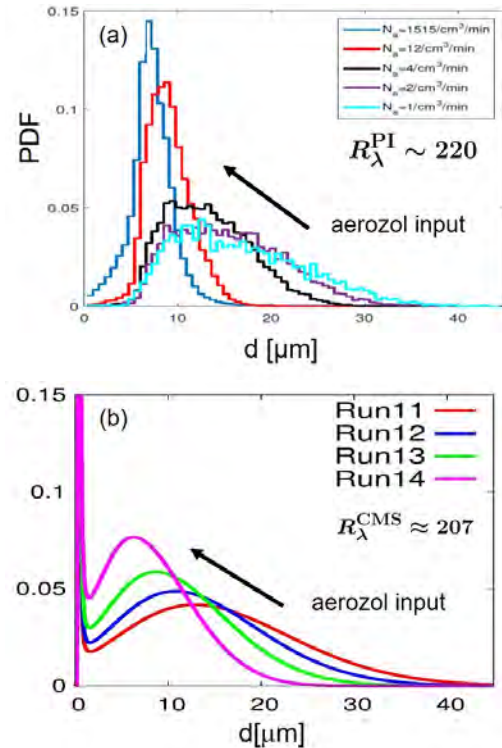


図6 エアロゾル注入率の増加に対する雲粒径分布関数の変化．(a) ミシガン工科大のパイチャンバーによる実験 $R_\lambda^{PI} = 220$ ¹⁶⁾，(b) CTSによる数値計算 $R_\lambda^{CTS} = 207$ ^{17,18)}．エアロゾル注入率の増大とともに雲粒径分布のピークは半径の小さい側に移動し分布の幅が狭くなる．(b)の左端の鋭いピークはエアロゾル注入の影響．

のCTSの計算結果については，実際の観測や実験とどれほどあっているのかとの指摘もある．そこで，2つの検証を行った．CTSではこれまでに実績のある乱流計算に雲粒子の追跡，凝結成長，衝突併合計算を加えたものである．先の2つについては室内実験の結果との比較，残りの一つは理論計算との比較により検証した．

ミシガン工科大のShaw教授らは，半径1m，高さ1mの円筒形容器内(パイチャンバー，体積が $\pi \text{ m}^3$)で下面を加熱，上面を冷却して湿潤空気によるレイリー・ベナール対流を発生させ，過飽和状態でエアロゾルを注入しその結果生じる雲粒子粒径分布を測定した¹⁶⁾．その結果が図6(a)である．エアロゾルの注入率を増加させると，雲粒子粒径分布関数のピークは左側に移動し分布幅は狭くなる．雲粒子生成はエアロゾルを核として起こるが，パイチャンバー内の一定量の水蒸気に対して注入するエアロゾル数が多ければ個々の雲粒子は小さいものが多数生成されることになる．一方，エアロゾル数が少なければ，ある雲粒子はたくさん水蒸気を集めて大きくなる可能性が出てくるため分布の幅が広がる．雲粒子

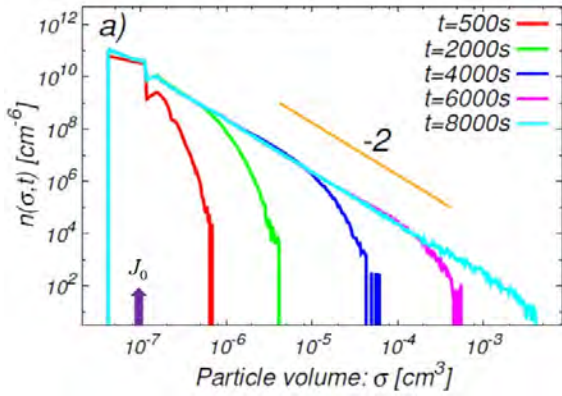


図7 非慣性粒子の衝突・併合による粒子スペクトル. 時間とともに分布関数は $n(\sigma) \propto \sigma^{-2}$ に比例した裾野を広げてゆくことがわかる²²⁾.

粒径分布関数の広がりはその後の雲粒子から雨粒子への成長において重要になる.

CTS による計算では, 1 辺が 1m の立方体中に定常乱流を生成し, この中に NaCl を核としケーラー曲線に従って粒子半径が $0.39 \mu\text{m}$ で雲粒子が生成し成長するようにした. 格子点数 512^3 , $\Delta t = 0.8 \text{ ms}$ で約 3000 秒の計算を行った^{17,18)}. この間, ポアソン分布に従って雲粒子を生成し, 重力沈降による雲粒子の除去をモデル化するために約 580 秒で一部の雲粒子を消去し定常状態を実現した. また, 対象とする雲粒径の範囲が最大でも $40 \mu\text{m}$ であり, 雲粒子間の衝突・併合は支配的ではないとの考えから, 雲粒子間の衝突・併合は取り入れていない. その結果が図 6 (b) である. 両者の乱流レイノルズ数はほぼ同等であり, 雲粒径分布関数のエアロゾル注入率の増加に対する傾向は同じである. 残念ながら, 定量的な比較にまでは至っていない.

衝突・併合過程だけが存在するとき, 雲粒径分布関数の時間発展は Smoluchowski 方程式で記述される¹⁹⁻²¹⁾. σ_1 と σ_2 の体積をもつ 2 つの非慣性の雲粒子の衝突・併合確率 $K(\sigma_1, \sigma_2)$ (衝突カーネル) が乱流のエネルギー散逸率 ϵ で表されるような単純な場合には, 雲粒径分布関数 $n(\sigma)$ がべき乗分布として得られる²²⁾.

$$n(\sigma) = K_0 J_0^{1/2} \left(\frac{8\pi\epsilon}{15\nu_a} \right)^{-1/4} \sigma^{-2} \quad (14)$$

ここで J_0 は単位時間単位体積当たりの雲粒子の注入率であり, K_0 は無次元定数で理論値は $K_0 = 0.41$ である. 余談になるが, 雲粒径分布関数 $n(\sigma)$ の方程式は乱流の運動エネルギースペクトルの方程式と非常によく似た構造をしており, 乱流理論とのアナロジーがとても有用である.

理論と同じ状況で CTS を用いて雲粒径分布関数を計算した結果が図 7 である. 時間とともに分布関数の右側裾野は確かに -2 の傾きをもって伸展してゆく. 計算された定数は $K_0^{\text{CTS}} = 0.38$ と理論解と 8% 以内で一致しており, CTS における衝突・併合計算は正しく行われていると考えている.

6 雲乱流

雲粒子の成長についての CTS の開発と検証をすすめていくうちに, 雲粒子と乱流との相互作用のより基本的な物理過程について新たな疑問が生まれるとともに, 興味深い数値計算法が得られた. 以下では乱流場と粒子との関わりを 2 つの視点から考えてみる.

6.1 雲粒子と乱流 Lagrange 的視点から

水質量, 熱, 物質質量などの属性を担う粒子と周囲の流体との間の相互作用は有限の特性時間で起こる. 例えば, 粒子集団が乱流中に分散している場合には, 乱流強度が減少すると推測されるが, 個々の粒子の大きさ, 粒子数密度, 乱流の特性時間によって変化の仕方が異なるであろう. 周囲の水蒸気がエアロゾルを核として雲粒子を生成する際, エアロゾルが多いほど相変化が速く進行する. すなわち, 相変化の特性時間はエアロゾルの数密度に反比例する $\tau_p \propto 1/\bar{n}$. この考えを雲粒子集団による乱流強度減衰問題に応用した. 流れの中に単位体積当たり \bar{n} 個のストークス源が分散したとみなして, 粒子集団としての特性時間 $\tau_{pe} = (6\pi\nu\bar{n}a)^{-1}$ を導入する. ここで, a は 1 個の粒子半径, ν は流体の動粘性率である. 一方, 流体の特性時間には巨視的渦回転時間 T_e をとる. すると乱流強度は

$$\frac{u_1^2}{u_0^2} = (1 + cDa)^{-2/3}, \quad Da = \frac{T_e}{\tau_{pe}} \quad (15)$$

で与えられる²³⁾. ここで u_0^2 は粒子がない時の乱流強度, Da はダムケラ数であり, $c = 3.61$ は DNS より見積もった無次元のパラメータである. 図 7 は定常乱流中に多数の粒子を分散させた DNS の計算と理論結果を質量負荷率

$$\phi_m = \frac{\rho_p \bar{n} V_p}{\rho_{fluid}} \quad (16)$$

を変えた場合について比較したものである. Da の増大とともに乱流強度が減少することが見て取れる. また, ϕ_m の減少とともに乱流強度の減衰が雲粒子の影響をうけなくなることがわかる²³⁾. 同様な結果

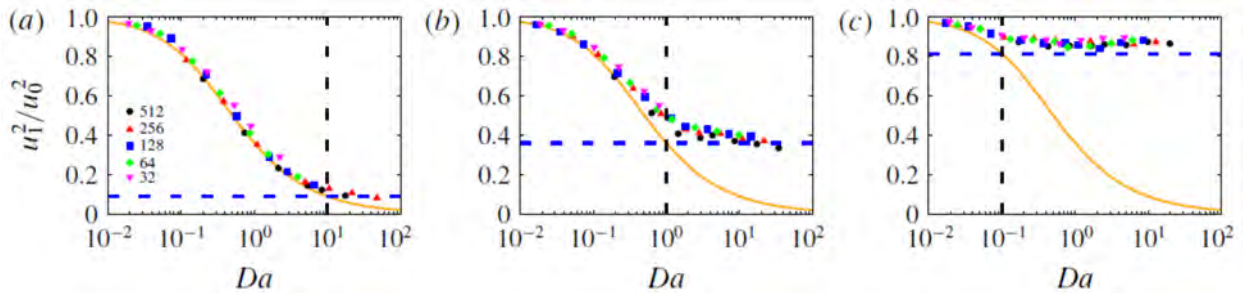


図7 乱流強度のダムケラ数と質量負荷依存性. オレンジの曲線は (15)式, 縦の破線は $Da = \phi_m$, 横の破線は (15) 式で $Da = \phi_m$ と置いた値, シンボルは DNS の結果 (色は空間格子点数, $R_\lambda = 26, 48, 81, 131, 211$). (a) $\phi_m = 10$, (b) $\phi_m = 1.0$, (c) $\phi_m = 0.1$ ²³⁾.

が, 雲乱流中の温度揺らぎと過飽和度揺らぎの分散の Da 依存性についても得られている ²⁴⁾. いずれの場合にも乱流の巨視的回転時間と雲粒子集団の相変化の特性時間 $\tau_{pe} = (6\pi\kappa\bar{n}a)^{-1}$ (κ は熱または過飽和度の拡散係数) によるダムケラ数 $Da = T_e/\tau_{pe}$ と質量負荷率 ϕ_m で表される.

雲粒子の凝結成長においては, 式(11)から雲粒子が経験する周囲の過飽和度が重要であり, その揺らぎ強度と雲粒子の軌跡に沿った過飽和度のラグランジュ時間相関が大きな影響を与える. このような考えから, 雲粒子が経験する過飽和度揺らぎのランジュバン方程式によるモデル化が行われてきている. 多くはガウス過程に従うランダムな揺らぎ項と過飽和度の相変化の特性時間で緩和するモデルとなっている ^{25,26)}. しかし, そもそも雲粒子が経験する過飽和度揺らぎのラグランジュ的自己相関関数を計算した例は見られない. CTS を用いて過飽和度 s のラグランジュ自己相関関数を計算したものを図8に示す. Da の増加と共に時間相関は速く減衰することがわかる. 得られた数値計算から示唆されるのは, 過飽和度のランジュバン方程式の緩和時間は, 乱流の特性時間と相変化の特性時間の調和平均

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{T_e} + \frac{1}{\tau_s} = \frac{1}{T_e(1 + Da)} \quad Da = \frac{T_e}{\tau_s} \quad (17)$$

で表されるということである. この考えをもとにした過飽和度のランジュバンモデルによる結果は DNS と一致している ²⁷⁾.

6.2 雲粒子と乱流 Euler 的視点

これまでの議論に頻繁に表れるのが流れと粒子の特性時間の比 Da である. しかし, 乱流における特性時間は1通りではない. 上の例は一樣な雲乱流中の1点統計についての議論であり, この場合には乱流の巨視的渦回転時間 T_e が Da に入るのは自然である. しかし, 雲粒子の周囲の過飽和度は乱流により輸送・混合されるのであるから, 過飽和度のランジ

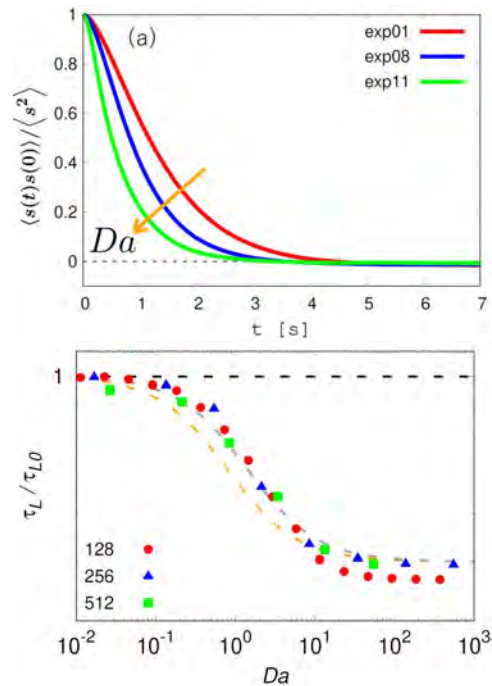


図8 雲粒子が経験する過飽和度の (a) : ラグランジュ自己相関関数. $(R_\lambda, N_g) =$ 赤: $(82, 128^3)$, 青: $(134, 256^3)$, 緑: $(225, 512^3)$. (b) 相関時間のダムケラ数依存性 ^{27,28)}.

ュバンモデルを考える際に, どの時間・空間スケールでモデル化するかを考慮する必要がある. 乱流中には巨視的サイズからコルモゴロフサイズまでの流体運動が特性時間 $\tau_f(k)$ (k は波数) でもって生起している. 従って, 式 (17) の T_e が $\tau_f(k)$ で置き替えられた場合には波数に依存する $Da(k)$ が現象を記述することになり, $Da(k)=1$ を境にして乱流と相変化の役割が交代することにより過飽和度スペクトルが変化する事が推測される. これを以下の単純な例で見てみよう.

鉛直方向に水蒸気混合比の一樣な平均勾配がある場合を考える. 式 (7) の C_d は粒子的描像に基づいているが, 過飽和度のスペクトルを議論するには連続体表現 (Euler 的) のほうが都合がよい. このため

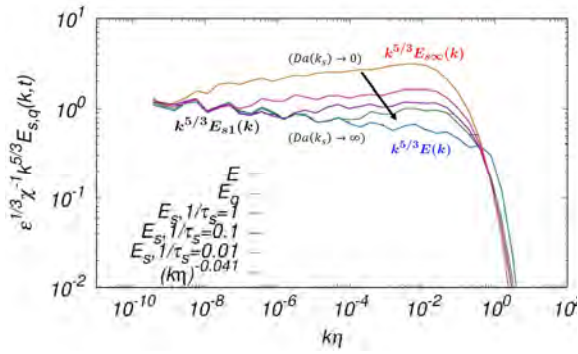


図 9 シェルモデルによる過飽和度スペクトルの τ_s 依存性. τ_s が小さくなるとともに $k^{5/3}E_s(k)$ と $k^{5/3}E(k)$ との重なるの波数領域が大きくなる³²⁾.

に, 半径 $\Delta(\geq \eta)$ の体積で粗視化を行うと

$$C_{d\Delta}(x, t) = \frac{1}{N(x, t; \Delta)} \sum_{j=1}^{N(x, t; \Delta)} C_d = \frac{1}{\tau_l} q_{v\Delta}(x, t) s_{\Delta}(x, t) \quad (18)$$

となる^{29,30)}. さらに $q_{v\Delta} = \bar{Q}_v$ (一定) とし, s_{Δ} の平均値は 0 と仮定すると粗視化された過飽和度揺らぎの方程式は以下ようになる (Δ は省略)

$$\frac{\partial s}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla s = -\frac{1}{\tau_s} s + \kappa_s \nabla^2 s + \Gamma_s u_3 \quad (19)$$

$$\frac{1}{\tau_s} = J \frac{\bar{Q}_l}{\tau_l} = J (4\pi K \bar{n}_d \bar{R}) \left(\frac{\rho_l}{\rho_a} \right) \quad (20)$$

Γ_s は過飽和度の平均勾配, τ_s は過飽和度の相変化の特性時間, $J = 265$ は無次元定数, \bar{n} は雲粒子数密度, \bar{R} は平均雲粒子半径, ρ_l と ρ_a はそれぞれ雲粒子と空気の密度である²⁶⁾. 式(19)には τ_s のほかに, 乱流による移流項および最右辺の u_3 の特性時間として $\tau_f(k) = (ku(k))^{-1} \approx \epsilon^{-1/3} k^{-2/3}$ がある. 両者の比は波数に依存したダムケラ数 $Da(k) = \tau_f(k)/\tau_s$ である. $Da(k_s) = 1$ となる波数 k_s 存在するから, $k_L \ll k_s \ll k_d$ であれば 2 つのべき的な過飽和度スペクトルが得られる^{30,32)}.

R1: $Da(k) \gg 1$ ($k \ll k_s$)

τ_s が乱流の特性時間よりもとても短く, 移流項よりも支配的なので式(19)の右辺第 1 項が第 3 項と直接バランスして $s = \Gamma_s \tau_s u_3$. これから

$$E_{s1}(k) \propto \bar{\Gamma}_s^2 \tau_s^2 k^{-5/3} \quad (21)$$

R2: $Da(k) \ll 1$ ($k \gg k_s$)

移流項が右辺第 1 項よりも支配的なので通常のパッシブスカラーの慣性移流領域での Obukhov-Corrsin の理論が成り立ち

$$E_{s2}(k) = C \bar{\Pi}_s \epsilon^{-1/3} k^{-5/3} \quad (22)$$

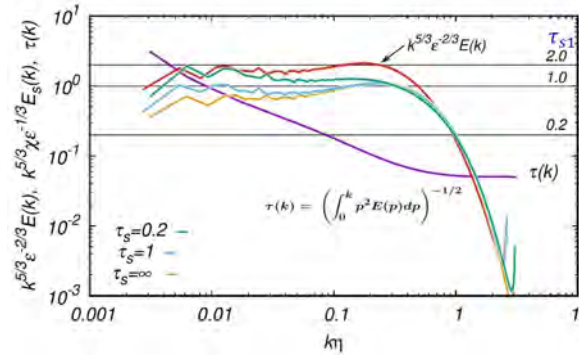


図 10 DNS による過飽和度スペクトル ($R_\lambda = 437$). τ_s が小さくなるとともに $k^{5/3}E_s(k)$ は低波数側で $k^{5/3}E(k)$ と重なるようになる. $\tau(k)$ は乱流の特性時間, 水平線は τ_s .

を得る. 従って, 2 つの $k^{-5/3}$ 領域が存在する. これは Mazin がかつてその存在を定性的な議論で予測していた³¹⁾.

これらの理論予想を検証するべく, 1 つは乱流スカラーのシェルモデル, 今一つは DNS (CTS で雲粒子なし) により解析した³²⁾. 図 9 はシェルモデルによる τ_s の変化に対する $k^{5/3}E(k)$, $k^{5/3}E_{s\infty}(k)$ (緩和項のない過飽和度スペクトル), $k^{5/3}E_s(k)$ (緩和項のある過飽和度スペクトル) の振る舞いを示したものである. 間欠性やシェルモデルの特性により $k^{5/3}E(k)$, $k^{5/3}E_{s\infty}(k)$ は慣性移流領域で水平ではないが, いまはこれについて議論しない. 見るべきは, τ_s が変化するとき $k^{5/3}E_s(k)$ はどのようにふるまうかである. 図より $1/\tau_s$ が小さい時には $k^{5/3}E_s(k)$ は低波数の小さい領域で $k^{5/3}E(k)$ に重なり, 高波数側で $k^{5/3}E_{s\infty}(k)$ と平行になる. $1/\tau_s$ の増加とともに遷移の波数 k_s は次第に大きくなり重なるの波数領域は広がる. この振る舞いは上で議論した有限の τ_s では 2 つの $k^{-5/3}$ 領域が存在するということとつじつまが合っている.

図 10 は DNS による定常乱流中における過飽和度スペクトルを τ_s を変えて調べたものである. ここでも τ_s が小さくなるとともに $k^{5/3}E_s(k)$ は低波数側で $k^{5/3}E(k)$ と重なるようになる. すなわち, τ_s が小さくなるとともに過飽和度は直ちに乱流速度場 u_3 に応答するため, 過飽和度は単に速度場を写し取ったものになる. 一方, 高波数側ではパッシブスカラー本来の乱流による移流・混合過程による揺らぎの高波数側への輸送が起っている. DNS では波数領域が狭いため, シェルモデルで見たような明瞭な 2 つの $k^{-5/3}$ 領域を観測するには至っていないが理論とはつじつまが合っている.

7 これまで そして これから

雲粒子と乱流とは様々な時空間スケールで多数の物理過程を通して相互作用しており、本研究で扱ってきたのはその一部を取り出して解析したに過ぎない。「はじめに」にも書いたが、本研究のモットーは微視的スケールから巨視的スケールへ、粘性スケールまで解像した乱流と少数だが素性の明らかな雲粒子の動力学との相互作用の本質に迫ることである。得られた成果は限られてはいるものの、雲粒子の成長(粒径分布関数)、乱流変調とその低波数領域への伝搬、過飽和度スペクトルの2つの $k^{-5/3}$ 領域の存在、ダムケラ数の重要性、ショットノイズの評価とフィルター関数による除去など、雲乱流現象解明に有用な知識が得られつつある。

雲乱流の研究を始めて10年以上になるが、これまで1年おきに国際ワークショップを開催してきた³³⁾。雲乱流研究のモットーをゆるいながらも共有する研究コミュニティもゆっくりではあるが徐々に育ってきてあり、仲間が増えるのは嬉しいかぎりである。

雲乱流研究の将来を予測するのは難しい。これまで得られた知見と大規模計算の経験をもとに、個々の研究テーマについて探求を続けていくことはもとより、より広い(本研究が扱うスケールよりも大きな(小さな)スケールでの現象を扱う)分野、野外観測や室内実験グループとの交流も進めていきたいと考えている。

謝辞

本研究は日本学術振興会科研費 20H00225, 20H02066, 18K03925 の支援を受けました。数値シミュレーションは HPCI(hp220054), JHPCN (jh220003, jh230019), NUCC(HPC 2022, 2023), 核融合科学研究所 プラズマシミュレータ共同研究 (NIFS22KISS002) からのご支援を受けてなされました。

引用文献

[1] Wang, P. K.: *Physics and Dynamics of Clouds and Precipitation*, Cambridge Univ. Press (2013).
 [2] Shaw, R. A.: Particle-turbulence interactions in atmospheric clouds, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **35** (2003) 183–227.
 [3] Bodenschatz, E., Malinowski, S. P., Shaw, R. A., Stratmann, F.: Can we understand clouds without turbulence? *Science*, **327** (2010), 970–971.
 [4] Grabowski, W. W., Wang, L.-P.: Growth of cloud droplets in a turbulent environment, *Annu. Rev. Fluid Mech.*, **45** (2013) 293–324.
 [5] Shima, S., Kusano, K., Kawano, A., Sugiyama, T., Kawahara, S.: The super-droplet method for the numerical simulation of clouds and precipitation: a particle-based and probabilistic microphysics model coupled with a non-

hydrostatic model, *Q. J. Roy. Meteor. Soc.*, **135** (2009) 1307–1320.
 [6] Vaillancourt, P.A., Yau, M. K., Grabowski, W. W.: Microscopic approach to cloud droplet growth by condensation: I. Model description and results without turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **58** (2001) 1945–1964.
 [7] Vaillancourt, P. A., Yau, M. K., Bartello, P., Grabowski, W. W.: Microscopic approach to cloud droplet growth by condensation: II. Turbulence, clustering, and condensational growth, *J. Atmos. Sci.*, **59** (2002), 3421–3435.
 [8] Matsuda, K., Onishi, R., Hirahara, M., Kurose, R., Takahashi, K., Komori, S.: Influence of microscale turbulent droplet clustering on radar cloud observations, *J. Atmos. Sci.*, **71** (2014) 3569–3582.
 [9] Gotoh, T., Suehiro, T., Saito, I.: Continuous growth of cloud droplets in cumulus cloud, *New J. Phys.*, **18** (2016) 043042.
 [10] Saito, I., Gotoh, T.: Turbulence and cloud droplets in cumulus clouds, *New J. Phys.* **20** (2018) 023001.
 [11] Takahashi, T.: Warm rain development in a three-dimensional cloud model, *J. Atmos. Sci.* **71** (1981) 1991–2013.
 [12] Berry, E. X., Reinhardt, R. L.: An analysis of cloud drop growth by collection: I. Double distributions *J. Atmos. Sci.*, **31**(1974) 1814–24.
 [13] Trabesinger, A. H.: Turbulent rain. *Nature Phys.*, **14**, (2018) 206.
 [14] Landau, L. D., Lifshitz, E. M.: *Statistical Physics* Pergamon Press (1969) 356–357.
 [15] Saito, I., Watanabe, T., Gotoh, T.: Spectrum of passive scalar carried by particles in isotropic turbulence, *Phys. Rev. Fluids*.(accepted) (2024).
 [16] Chandrakar, K. K., Cantrell, W., Chang, K., Ciochetto, D., Niedermeier, D., Ovchinnikov, M., Shaw, R. A., Yang, F.: Aerosol indirect effect from turbulence-induced broadening of cloud droplet size distributions, *P. Natl. Acad. Sci. USA*, **113** (2016) , 14243–14248.
 [17] Saito, I., Gotoh, T., Watanabe, T.: Broadening of cloud droplet size distributions by condensation in turbulence, *J. Meteorol. Soc. Japan*, **97**(4) (2019) (867–891).
 [18] Chandrakar, K.K., Saito, I., Yang, F., Cantrell, W., Gotoh, T., Shaw, R. A.: Functional form of droplet size distributions in turbulent clouds: experimental evaluation of theoretical distributions, *Q. J. R. Meteorol. Soc.*, **146** (2020) 483–504.
 [19] Smoluchowski, M.: Drei Vorträge über Diffusion, Brownsche Molekularbewegung und Koagulation von Kolloidteilchen. *Phys. Z.*, **17** (1916) 557–571, 585–599.
 [20] Falkovich, G., Fouxon, A., Stepanov, M.G. : Acceleration of rain initiation by cloud turbulence, *Nature*, **419** (2002) 151–154.
 [21] Horvai, P., Nazarenko, S. V., Stein, T. H. M., Coalescence of particles by differential sedimentation, *J. Stat. Phys.*, **130** (2008) 1177–1195.
 [22] Saito, I., Gotoh, T., Watanabe, T. Size-distribution spectrum of non-inertial particles in turbulence, *Phys. Rev. E.*, **97** (2018) 053108.
 [23] Saito, I., Watanabe, T., Gotoh, T.: A new timescale for turbulence modulation by particles, *J. Fluid Mech.*, **880** (2019) R6.

- [24] Saito, I., Watanabe, T., Gotoh, T.: Modulation of fluid temperature fluctuations by particles in turbulence, *J. Fluid Mech.* **931** (2021) A6.
- [25] Abade, G. C., Grabowski, W. W., Pawlowska, H.: Broadening of cloud droplet spectra through eddy hopping: Turbulent entraining parcel simulations, *J. Atmos. Sci.*, **75** (2018), 3365–3379,
- [26] Sardina, G., Picano, F., Brandt, L., Caballero, R.: Continuous growth of droplet size variance due to condensation in turbulent clouds, *Phys. Rev. Lett.*, **115** (2015) 1–5.
- [27] Saito, I., Watanabe, T., Gotoh, T.: Statistical properties of a stochastic model of eddy hopping, *Atmos. Chem. Phys.*, **21**, (2021) 13119–13130.
- [28] 斎藤泉, 後藤俊幸, 渡邊威: 雲乱流環境における過飽和度揺らぎのラグランジュ的自己相関時間, 極地研 エアロゾル・雲・降水に関する研究集会. 3月 (2023).
- [29] Lanotte, A. S., Seminara, A., Toschi, F.: Cloud droplet growth by condensation in homogeneous isotropic turbulence, *J. Atmos. Sci.*, **66** (2009) 1685–1697.
- [30] Gotoh, T., Saito, I., Watanabe, T.: Spectra of supersaturation and liquid water content in cloud turbulence, *Phys. Rev. Fluids* **6** (2021) 110512.
- [31] Mazin, I.: The effect of condensation and evaporation on turbulence in clouds, *Atmos. Res.* **51** (1999) 171–174.
- [32] Gotoh, T., Saito, I., Watanabe, T.: Spectrum of supersaturation fluctuations and Lagrangian-Eulerian computation, AMS 104h Ann. Meeting Baltimore, USA Jan.29 (2024).
- [33] <https://sites.google.com/view/cloudturb5>