

〔原著論文〕

# 迎角のついたアーチェリー矢側面の 境界層流れの安定性解析

電気通信大学大学院 情報理工学研究科	伊 藤 一 希
電気通信大学大学院 情報理工学研究科	守 裕 也
電気通信大学大学院 情報理工学研究科	宮 寄 武*
東京電機大学大学院 工学研究科	董 紫 旭
東京電機大学大学院 工学研究科	正 藤 範 一
東京電機大学大学院 工学研究科	岩 津 玲 磨
東京電機大学大学院 工学研究科	高 橋 直 也

## Stability analysis of the boundary layer flow around an archery arrow with angle of attack

Kazuki Ito, The University of Electro-Communications

Hiroya Mamori, The University of Electro-Communications

\*Takeshi Miyazaki, The University of Electro-Communications

Zixu Dong, Tokyo Denki University

Norikazu Shodo, Tokyo Denki University

Reima Iwatsu, Tokyo Denki University

Naoya Takahashi, Tokyo Denki University

\*E-mail: miyazaki@mce.uec.ac.jp

(Received 22 April 2022; revised 30 May 2022; accepted 8 June 2022; published 25 August 2022)

The linear instability of the boundary layer flow formed along an archery arrow with a small angle of attack  $\gamma$  is investigated based on the parallel flow approximation. The basic flow field is computed numerically at Reynolds numbers  $Re = 1.5 \times 10^4$  and  $2.0 \times 10^4$  (using the arrow shaft diameter as a representative length). Two types (bulge and streamlined) of point are considered. When a streamlined point is attached, the numerically obtained flow is stationary for  $\gamma \leq 0.7^\circ$  and  $\gamma \leq 0.6^\circ$  at  $Re = 1.5 \times 10^4$  and  $2.0 \times 10^4$ , respectively. In contrast, stationary flow is found only for  $\gamma \leq 0.3^\circ$  at  $Re = 1.5 \times 10^4$ , if a bulge point is attached. The basic flow with both points becomes more stable as  $\gamma$  is increased in the range  $\gamma \leq 0.3^\circ$ . In the case of the streamlined point, new instability modes are found downstream, as  $\gamma$  increases more than  $0.5^\circ$ . The result for the bulge point apparently contradicts with the numerical result that the basic flow becomes unsteady as  $\gamma$  increases more than  $0.3^\circ$ , suggesting that the stability analysis should take account of the influence of the flow separation behind the bulge point.

(KEY WORDS): archery arrow, angle of attack, boundary layer flow, linear stability analysis, point shape

## 1 緒言

オリンピックのアーチェリー競技では70m先の直径12.2cmの円を常に射抜くことが要求される。矢の速度はおよそ60m/sで、シャフトの直径を代表長さにした $Re$ 数は $2.0 \times 10^4$ 程度である。矢周りの境界層流れが乱流遷移すると空気抵抗は有意に増加し、鉛直方向に的ずれが生じるため、競技のスコアに大きな影響を及ぼす。飛翔中の矢周りの境界層流れの乱流遷移メカニズムの解明および制御はスポーツ流体力学の観点からも重要である。

Miyazaki *et al.*<sup>1,2)</sup> は JAXA の磁力支持天秤装置付風洞 (MSBS 風洞) 実験と JISS における飛翔実験から、気流に対する矢の迎角が  $0.6^\circ$  以上つくと、競技用鏃 (椎型鏃) をつけた矢の側面境界層流れが乱流遷移し、抗力係数  $C_D$  が急激に増加することを示した。Ortiz *et al.*<sup>3)</sup> はアーチェリー矢のシャフト内に加速度センサを挿入し、飛翔中の矢の  $C_D$  値を計測した。高速度ビデオカメラの映像から飛翔中の矢の迎角は  $0.5^\circ$  程度と評価されたが、椎型鏃では  $1.6 \times 10^4 \leq Re \leq 1.8 \times 10^4$  の領域に遷移領域が存在し、流線形鏃では  $Re = 2.0 \times 10^4$  でも層流状態が維持されることが示された。

境界層流れの乱流遷移機構を解明するためには、まずその安定性を調べる必要がある。円筒周りの軸対称な境界層流れの線形安定性に関する研究は数多く存在し<sup>4-6)</sup>、Vinod and Govindarajan<sup>7)</sup> は円筒側面に発達する境界層流れの2次不安定性を調べている。これらの研究によって、円筒周りの境界層流れは平板境界層流れに比べてより安定であることが示された。しかし、主な解析対象が非常に細長い (細長比  $10^5$ ) 円筒の下流域であったため、先端では Blasius 境界層が仮定されてきた。

鏃形状の安定性に対する影響を評価するためには、鏃形状を反映する基本流を設定しなければならない。長谷川ら<sup>8)</sup> は軸対称直接数値計算から得たアーチェリー矢の境界層流れに対して、平行流近似に基づいた線形安定性解析を行い、矢周りの境界層流れは周回方向波数  $l = 1, 2$  のモードに対して線形不安定であることを示した。しかし、攪乱の空間増幅率の目安となる  $N$  値は乱流遷移をもたらすほど大きくなかった。流線形鏃を装着した場合について、伊藤ら<sup>9)</sup> は、軸対称直接数値計算によって得られた境界層流れに迎角の効果を模擬した変動成分を重ね合わせて2次不安定性を調べた。その結果、不安定性の成長率が先端付近で有意に増加し、矢に迎角がつくことで境界層流れの不安定化と乱流遷移がもたらされる可能性を示した。しかし、より信頼性の高い安定性解析を行うためには、仮想的な基本流ではなく実際に迎角のついた矢周りの境界層流れを基本流としなければならない。

本研究では、3次元直接数値計算で得られた非軸対称流を基本流として、平行流近似に基づいた線形安定性解析を行い、迎角と鏃形状が境界層流れの安定性に及ぼす影響を解明する。実験結果との対応を議論する場合には、空間発展型の線形安定性解析がより望ましいとされている。しかし、微小な迎角のついた矢側面の境界層流れについての詳細な風洞実験結果は見当たらないので、ここでは軸対称流れに対する理論的結果<sup>8)</sup>と比較するために、時間発展型の線形安定性解析を行った。

## 2 非軸対称流の直接数値計算

本節では、迎角のついた矢周りの非軸対称流の3次元直接数値計算について記述する。また、数値計算結果として得られた非軸対称流を Fourier 級数展開することで、各周回方向波数に対応する成分が  $Re$  数や迎角にどのように依存するかについて述べる。

### 2.1 直接数値計算手法

董ら<sup>10)</sup> はベアシャフト (矢羽なし) を過ぎる非軸対称流の3次元直接数値計算を行った。シャフト部分を半径を  $a$ 、長さを  $258a$  (細長比 129) の円柱としている。鏃形状として流線形と椎型の2種類を考える。それぞれの鏃形状を図1に示す。流線形鏃は椎型鏃よりも長く、椎型鏃の最大直径はシャフト直径よりも大きいことが特徴である。

円筒座標系  $(z, r, \theta)$  の Navier-Stokes 方程式の定常解を射影法で数値的に求めた。座標系は矢軸方向を  $z$ 、半径方向を  $r$ 、周回方向を  $\theta$  として、鏃とシャフトの継ぎ目の中心点を原点とする。代数型格子生成法でO型の計算格子を作成し、格子数は  $2073 \times 171 \times 82$  で、最小格子幅は  $1.0 \times 10^{-3}$  である。空間差分の精度は2次であり、内部点は2次の中心差分、境界点では2次の片側差分近似を使用する。時間積分には3段2位の低容量 Runge-Kutta 法を使用する。 $Re$  数は一様流速  $U_\infty$  を代表速度に、シャフトの直径  $2a$  を代表長として、 $Re = 2U_\infty a / \nu$  とする。ここで、 $\nu$  は流体の動粘性率である。

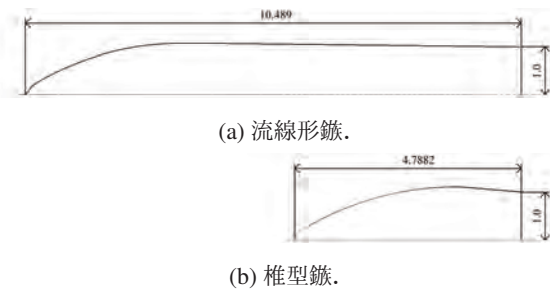


図1: 鏃形状の概形 (代表長はシャフト半径)。

## 2.2 定常状態と非定常状態

直接数値計算は  $Re = 1.5, 2.0 \times 10^4$  で、迎角  $0.1^\circ$  刻みで実行された。無次元時間  $t > 500$  で計算された  $C_D$  値が一定となる場合を定常流、 $C_D$  値が時間変動する場合を非定常流と判断する。安定性解析の基本流としては、 $1000 \leq t \leq 1100$  の時間平均流速場を用いる。流線形鏝の  $Re = 1.5 \times 10^4$  の場合は  $\gamma \geq 0.8^\circ$  で非定常流となり、 $Re = 2.0 \times 10^4$  の場合は  $\gamma \geq 0.7^\circ$  で非定常流となった。一方で、椎型鏝の  $Re = 1.5 \times 10^4$  の場合は  $\gamma \geq 0.4^\circ$  で非定常流となり、 $Re = 2.0 \times 10^4$  の場合は  $\gamma = 0^\circ$  ですでに非定常流となり、定常流は得られなかった。椎型鏝を装着した場合は流線形鏝を装着した場合に比べて小さい迎角で非定常性が現れる。数値計算において流れが非定常化すると抗力係数も増大する。矢側面の境界層流れが不安定化したものと考えられ、迎角や  $Re$  数の増加が global instability をもたらしている。そのメカニズムに迫るための第一段階として、本研究では流線形鏝で定常解を得られた  $Re = 1.5 \times 10^4, 0 \leq \gamma \leq 0.7^\circ$  と  $Re = 2.0 \times 10^4, 0 \leq \gamma \leq 0.6^\circ$  の場合に加えて、椎型鏝で定常解を得られた  $Re = 1.5 \times 10^4, 0 \leq \gamma \leq 0.3^\circ$  の場合について線形安定性を調べる。

図2に流線形鏝を装着した場合の境界層流れの軸流成分  $U_z$  を示す。 $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.5^\circ$  の計算結果である。一樣流は紙面左かつ奥側から手前に向かうように流れている。軸方向速度成分は腹側（奥側）で加速され、背側（手前側）で減速される。迎角の影響（軸対称流とのずれ）は下流側へ向かうにつれてより顕著となる。また、迎角が小さい場合、軸方向速度成分が卓越し、半径・周回方向の速度成分よりも2桁以上大きい。

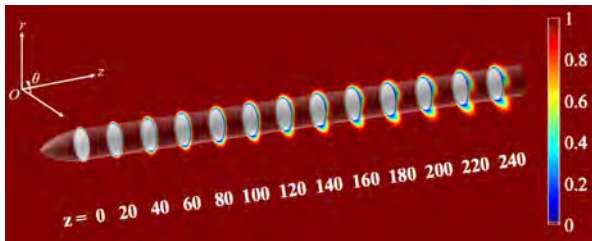


図2: 軸方向速度成分  $U_z$  の可視化: 流線形鏝を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.5^\circ$  の境界層流れ。

## 2.3 定常非軸対称流のフーリエ級数展開

線形安定性解析の準備として、3次元直接数値計算から得た定常非軸対称流 ( $U_z, U_r, U_\theta$ ) を Fourier 級数展開

し、各周回方向波数に対応する成分に分解する。

$$\mathbf{U}^{(0)}(r) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathbf{U}(r, \theta) d\theta \quad (1)$$

$$u_z^{(m)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_z(r, \theta) \cos m\theta d\theta \quad (2)$$

$$u_r^{(m)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_r(r, \theta) \cos m\theta d\theta \quad (3)$$

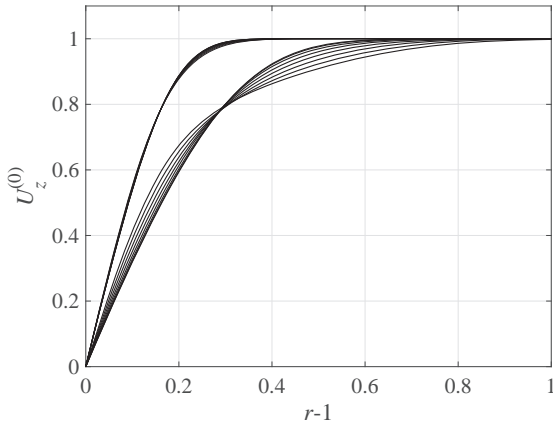
$$u_\theta^{(m)}(r) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} U_\theta(r, \theta) \sin m\theta d\theta \quad (4)$$

ここで  $\mathbf{U}^{(0)}$  は周回方向波数  $m = 0$  に、 $u_{z,r,\theta}^{(m)}$  は  $m \neq 0$  に対応する成分である。 $z, r$  方向の  $\sin$  成分と  $\theta$  方向の  $\cos$  成分の振幅は  $O(10^{-5})$  以下であり、基本流には対称性がある。

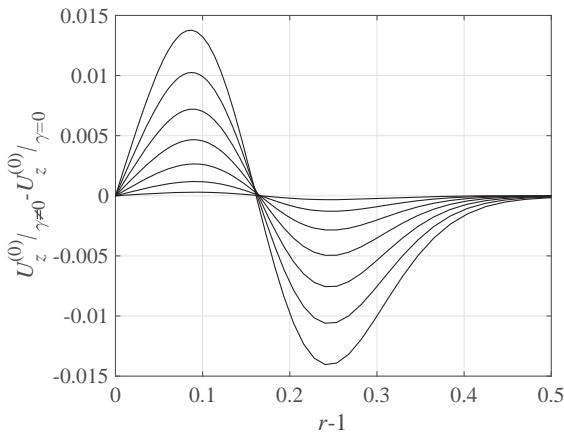
まず、流線形鏝を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4$  の軸対称 ( $m = 0$ ) 成分  $U_z^{(0)}$  に着目する。図3aに  $U_z^{(0)}$  の半径方向分布を、図3bに  $U_z^{(0)}|_{\gamma \neq 0}$  と  $U_z^{(0)}|_{\gamma = 0}$  の差を示す。軸方向位置はそれぞれ  $z = 20$  と  $z = 100$  である。境界層は下流側 ( $z = 100$ ) でより厚くなる。 $U_z^{(0)}$  は境界層内の円筒表面付近で加速され、遠方で減速される。図3bに  $z = 20$  における軸対称成分の差分を示すが、ほぼ迎角の2乗に比例して増加する。従って、この軸方向流の軸対称成分の変化は、迎角について2次の非線形効果として現れてくる。また、下流側へ向かうほど軸対称速度成分の半径方向分布は大きく変化する。

次に、流線形鏝を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4$  の矢周りの非軸対称流の ( $m = 1$ ) 成分  $u_z^{(1)}$  に着目する (図4a)。 $u_z^{(1)}$  が負となることは、軸方向流が  $\theta = \pi$  の腹側で加速、 $\theta = 0$  の背側で減速されることを示す。その振幅はほぼ迎角に比例することが分かり、小迎角がつくことの主要な線形効果として現れている。実際、この成分の振幅は図3bの軸対称成分の変化よりも1桁大きく、平板境界層流れにおける「ストリーク構造」の形成に類似するものであり、矢周りの境界層流れの安定性に影響を及ぼすと考えられる。

次に、 $u_z^{(m)}, m = 2, 3$  のフーリエ成分を図4bと図4cにそれぞれ示す。 $u_z^{(2)}$  の振幅はほぼ迎角の2乗に比例して増加しており、2次の非線形効果として現れている。また、その振幅は  $u_z^{(1)}$  のものよりも1桁小さい。同様に、 $u_z^{(3)}$  は迎角の3次の非線形効果として現れるものと思われたが、その振幅は  $u_z^{(2)}$  に比べてそれほど小さくないので、次節の線形安定性解析ではこの成分までを考慮して基本流を設定する。



(a)  $U_z^{(0)}$  の半径方向分布 :  $\gamma \leq 0.7^\circ, z = 20, 100$ .



(b)  $U_z^{(0)}|_{\gamma \neq 0}$  と  $U_z^{(0)}|_{\gamma=0}$  の差 :  $z = 20, \gamma = 0.7^\circ, 0.6^\circ, 0.5^\circ, 0.4^\circ, 0.3^\circ, 0.2^\circ, 0.1^\circ$  ( $r = 1.1$  で上から).

図 3:  $U_z^{(0)}$  の半径方向分布 : 流線形鏝を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4$  の境界層流れ.

### 3 線形安定性解析

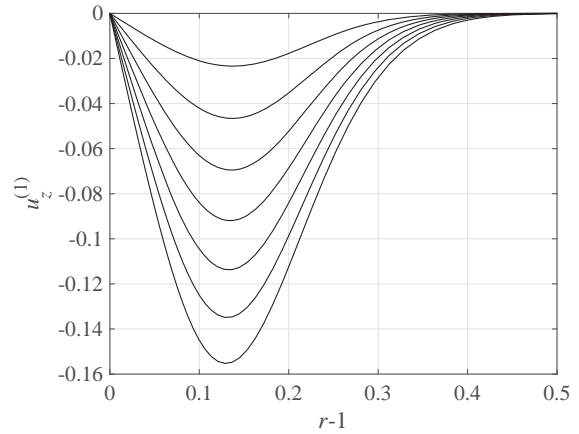
#### 3.1 基本流の設定

非軸対称流 ( $U_z, U_r, U_\theta$ ) に対して基本流 ( $\bar{U}_z, \bar{U}_r, \bar{U}_\theta$ ) を以下のように設定する.

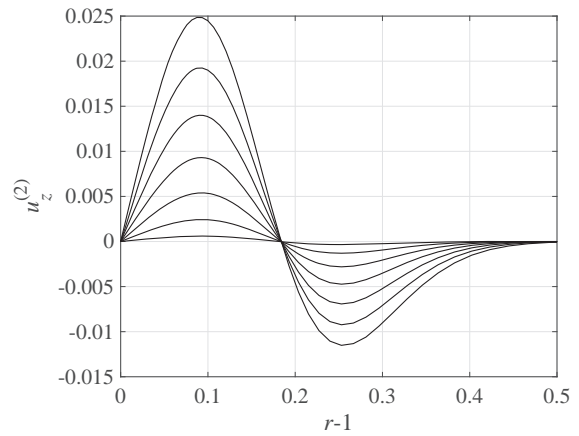
$$\bar{U}_z = U_z^{(0)}(r) + \sum_{m=1}^3 u_z^{(m)}(r) \cos m\theta \quad (5)$$

$$\bar{U}_\theta = U_\theta^{(0)}(r) + \sum_{m=1}^3 u_\theta^{(m)}(r) \sin m\theta \quad (6)$$

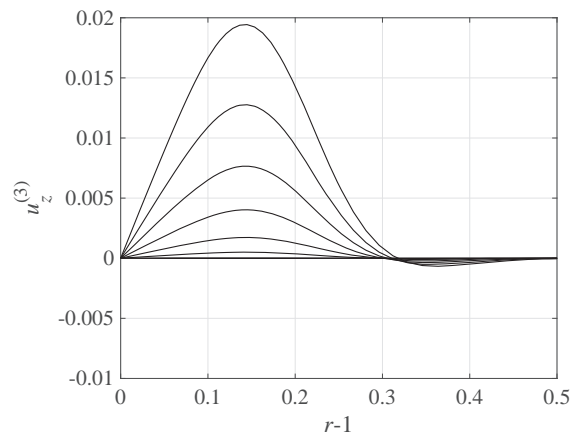
本研究で  $m > 3$  のフーリエモードを考慮しないのは、線形攪乱を周回方向にフーリエ級数展開する際の打ち切り波数をできるだけ小さくして、固有値問題の行列のサイズを小さく留めるためである。基本流のフーリエ級数展開を打ち切ることによる安定性解析結果への影響は、 $m = 0, 1, 2$  までを考慮した場合と  $m = 0, 1, 2, 3$  までを考慮した場合に得られる最大成長率の有効数字 3 桁目の差として現れる。また、平行流近似に基づいて線形安



(a)  $u_z^{(1)}$  の半径方向分布 :  $z = 20, \gamma = 0.1^\circ, 0.2^\circ, 0.3^\circ, 0.4^\circ, 0.5^\circ, 0.6^\circ, 0.7^\circ$  ( $r = 1.1$  で上から).



(b)  $u_z^{(2)}$  の半径方向分布 :  $z = 20, \gamma = 0.7^\circ, 0.6^\circ, 0.5^\circ, 0.4^\circ, 0.3^\circ, 0.2^\circ, 0.1^\circ$  ( $r = 1.1$  で上から).



(c)  $u_z^{(3)}$  の半径方向分布 :  $z = 20, \gamma = 0.7^\circ, 0.6^\circ, 0.5^\circ, 0.4^\circ, 0.3^\circ, 0.2^\circ, 0.1^\circ$  ( $r = 1.1$  で上から).

図 4:  $u_z^{(m)}$  の半径方向分布 : 流線形鏝を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, z = 20$  の境界層流れ.



定性解析を行うので、迎角のついていない軸対称流の場合と同様に半径方向の速度成分は  $\bar{U}_r = 0$  とする。しかし、椎型鏝を装着する場合には、鏝とシャフトの接合部  $z \leq 4$  に逆流領域が存在するため、このような場所では半径方向の速度成分を無視する平行流近似は適用できない<sup>8)</sup>。

### 3.2 平行流近似に基づく線形化

以下の形の線形攪乱を基本流に重ねる。

$$\begin{pmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\theta \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z(r, \theta) \\ v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \\ q(r, \theta) \end{pmatrix} e^{i(\alpha z - \omega t)} \quad (7)$$

ここで、 $u_z, u_r, u_\theta$  と  $p$  は、それぞれ速度攪乱の各成分と圧力攪乱を表す。時間発展型の線形安定性解析を行うため、攪乱の軸方向波数を表す右辺の  $\alpha$  は実数とする。また  $\omega$  は複素角周波数であり、その虚部  $\omega_i$  は攪乱の成長率を表す。もしひとつでも  $\omega_i > 0$  となる固有値があれば、その攪乱が成長し、基本流は線形不安定となる。一方、全ての固有値で  $\omega_i < 0$  ならば、基本流は線形安定となる。実部  $\omega_r$  は攪乱の角振動数を表す。

線形安定性解析で使用する線形攪乱方程式は以下である。

$$i(\alpha \bar{U}_z - \omega)v_z + \frac{\bar{U}_\theta}{r} \frac{\partial v_z}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \bar{U}_z}{\partial \theta} + \frac{d\bar{U}_z}{dr} v_r + i\alpha q \\ = \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_z}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_z}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_z}{\partial \theta^2} - \alpha^2 v_z \right] \quad (8)$$

$$i(\alpha \bar{U}_z - \omega)v_r + \frac{\bar{U}_\theta}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} - \frac{2\bar{U}_\theta}{r} v_\theta + \frac{\partial q}{\partial r} = \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_r}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_r}{\partial \theta^2} - \left( \alpha^2 + \frac{1}{r^2} \right) v_r - \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right] \quad (9)$$

$$i(\alpha \bar{U}_z - \omega)v_\theta + \frac{\bar{U}_\theta}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{v_\theta}{r} \frac{\partial \bar{U}_\theta}{\partial \theta} + \left( \frac{d\bar{U}_\theta}{dr} + \frac{\bar{U}_\theta}{r} \right) v_r \\ + \frac{1}{r} \frac{\partial q}{\partial \theta} = \frac{2}{Re} \left[ \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 v_\theta}{\partial \theta^2} - \left( \alpha^2 + \frac{1}{r^2} \right) v_\theta + \frac{2}{r^2} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right] \quad (10)$$

$$i\alpha v_z + \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{v_r}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} = 0 \quad (11)$$

攪乱が満足する境界条件は円筒表面での粘着条件と無限遠での Dirichlet 条件である。

$$v_z = v_r = v_\theta = 0 \quad (r = 0, r \rightarrow \infty) \quad (12)$$

式 (9)~(11) は偏微分方程式であるため、半径方向と周回方向の 2 方向にそれぞれ離散化し、固有値問題に帰着させる必要がある。

### 3.3 固有値問題の定式化

固有値問題を数値的に解くために、 $\zeta = 2(z/Re)^{1/2}, \sigma = (r-1)/\zeta$  の座標変換<sup>6)</sup>を導入す

る。ここで  $\sigma$  方向の離散化には Chebyshev 選点法を使用した。選点数  $N$  に対して、 $\sigma$  方向の点と Chebyshev 点には以下の関係がある。

$$x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N-1}\right) \quad 0 \leq n \leq N-1 \quad (13)$$

$$x = \frac{\sigma - \hat{\sigma}}{\sigma + \hat{\sigma}} \quad \sigma \in [0, \infty) \rightarrow x \in [-1, 1] \quad (14)$$

ここでは  $\hat{\sigma}$  は  $\sigma$  方向の Chebyshev 点の分布を決める実数で、シャフト表面付近での点の粗密を調整する。 $\hat{\sigma}$  が小さいほどシャフト付近で点は密に分布する。本研究では、長谷川ら<sup>8)</sup> にならって  $N = 64, \hat{\sigma} = 5$  とした。

$\theta$  方向の離散化には式 (15) の複素 Fourier 級数展開を使用した。

$$\begin{pmatrix} v_z(r, \theta) \\ v_r(r, \theta) \\ v_\theta(r, \theta) \\ q(r, \theta) \end{pmatrix} = \sum_{l=-L}^L \begin{pmatrix} A_l(r) \\ B_l(r) \\ C_l(r) \\ D_l(r) \end{pmatrix} e^{il\theta} \quad (15)$$

以下の線形安定性解析では、迎角  $\gamma$  や軸方向座標  $z$  に応じて、展開項数を  $8 \leq L \leq 15$  の領域で変化させた。このとき、 $l = L$  に対応する固有関数の振幅は  $O(10^{-2})$  以下であり、 $\omega_i$  は少なくとも 2 桁以上の一致を確認した。以上の離散化により、式 (9)~(11) は  $r$  方向の常微分方程式となり、 $\alpha$  をパラメータとした  $\omega, v$  の固有値問題に帰着される。さらに圧力項  $D_l(r)$  を消去することで変数の数を減らし、 $3(N-2)(2L+1)$  次の固有値問題とする。固有値計算は MathWorks 社の数値解析ソフトウェア MATLAB の eig 関数を使用した QZ 法で行う。各  $z$  において、軸方向波数  $\alpha$  の様々な値に対して固有値を計算し、 $\omega_i$  を最大とする  $\alpha_{\max}$  を探す。

## 4 線形安定性解析結果

本節では、迎角が小さく境界層流れが安定化される場合と、迎角が大きくなり新しいタイプの不安定性が現れる場合とに分けて、線形安定性解析結果を紹介する。

### 4.1 迎角が小さい場合 ( $\gamma \leq 0.3^\circ$ ): 流線形鏝・椎型鏝

流線形鏝を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  の場合の局所最大成長率  $\omega_i$  を図 5 に示す。横軸は軸方向座標  $z$  を表す。破線は迎角がついていない場合 ( $\gamma = 0^\circ$ ) の結果を示す。上流側の不安定性は周回方向波数  $l = 2$  のモードに対応し、下流側は周回方向波数  $l = 1$  のモードの成長率を表す。図 5 から分かるように、迎角が増加するにつれて  $\omega_i$  は単調に減少する。周回方向波数  $l = 2$  のモードと  $l = 1$  のモードの切り替わる場所は迎角とともに上流側に移動するが、それぞれのモードの特徴はほとんど変わらない。実際、図 6 に、様々な迎角に対して最大成長率を与える  $\alpha_{\max}$  を  $z$  の関数として示すが、迎

角がついていない場合（破線）との類似性が見られる。また、迎角  $\gamma = 0.2^\circ$  の場合について、 $z = 50, 150$  における固有関数の  $z$  成分 ( $v_z$ ) の断面分布を、図7と図8にそれぞれ示す。 $z = 50$  では周回方向波数  $l = 2$  の特徴が、 $z = 150$  では周回方向波数  $l = 1$  の特徴が保たれている。

迎角がつくことで境界層流れの安定性が高まるという結果は少し意外であるが、付録1に示すように、迎角の変化に伴う基本流の軸対称 ( $m = 0$ ) 成分の変化が安定化に寄与している。仮に基本流の軸対称 ( $m = 0$ ) 成分の変化を考慮せずに、 $m = 1$  の成分の変化分だけを重ねさせた基本流を仮想的に設定すると、迎角の増加とともに  $\omega_i$  は単調増加することが確認できる。しかし、軸対称 ( $m = 0$ ) 成分の変化がその不安定化を打ち消している。

図9に、流線形鏃を装着した  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  の場合における局所最大成長率  $\omega_i$  を示す。横軸は  $z$  を表し、図中の破線は迎角がついていない場合の結果である<sup>8)</sup>。  $Re$  数が増加すると不安定性は強まるが、迎角の増加とともに境界層流れが安定化されていくことは、 $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  の場合と同様であることが分かる。従って、流線形鏃を装着した矢側面の境界層流れは  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  では層流状態を保つと思われる。

椎型鏃を装着した場合についての結果を図10に示す。迎角のついていない軸対称境界層流れの線形安定性解析でも鏃形状の顕著な影響はなかったが<sup>8)</sup>、小さな迎角をつけても図5の流線形鏃の場合とほとんど同じ結果となる。一方、 $\gamma \geq 0.4^\circ$  の領域の直接数値計算では非定常状態が得られた。下流域 ( $z > 5$ ) における平行流近似に基づく線形安定性解析では、境界層流れの不安定化の兆候を全く捉えることができず、この事実を説明できない。平行流近似に基づく安定性解析では調べることができない椎型鏃後端の剥離・再付着領域の不安定化が本質的な影響を及ぼしているようである。この領域の安定性を調べるためには、平行流近似によらない TriGlobal な安定性解析が必要となる<sup>11)</sup>。

#### 4.2 迎角が大きい場合 ( $\gamma = 0.5^\circ, 0.6^\circ, 0.7^\circ$ ): 流線形鏃

流線形鏃を装着した場合の直接数値計算では、 $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \geq 0.8^\circ$ 、 $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma \geq 0.7^\circ$  で、それぞれ非定常状態となった。ここでは、迎角がより大きくて定常状態となる場合 ( $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.5^\circ, 0.6^\circ, 0.7^\circ$  と  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma = 0.5^\circ, 0.6^\circ$ ) について調べる。迎角の増加とともに上流域の安定性は強まるが、下流域には新しい不安定性が現れる。

図11に、 $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \geq 0.5^\circ$  (黒実線) と  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma \geq 0.5^\circ$  (青実線) についての結果を示す。横軸は軸方向距離  $z$  で、縦軸が局所最大成長率  $\omega_i$  を表

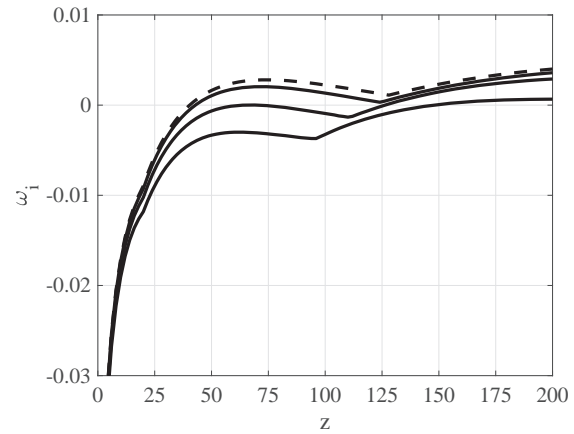


図5: 局所最大成長率: 流線形鏃を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  の境界層流れ: 破線  $\gamma = 0^\circ$ ; 実線  $\gamma = 0.1^\circ, 0.2^\circ, 0.3^\circ$  ( $z = 100$  で上から)。

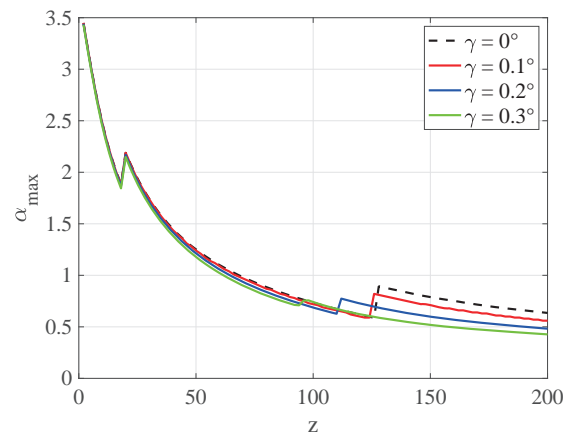


図6: 局所最大成長率に対応する  $\alpha_{\max}$ : 流線形鏃を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  の境界層流れ: 破線  $\gamma = 0^\circ$ ; 赤実線  $\gamma = 0.1^\circ$ ; 青実線  $0.2^\circ$ ; 緑実線  $0.3^\circ$ 。

す。比較のために、 $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0^\circ$  (黒破線) と  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma = 0^\circ$  (青破線) の結果を加えている。迎角が大きくなると、有意に大きな成長率を持つ不安定モードが下流域に現れてくる。この不安定性は迎角のついていない軸対称な境界層流れで見られた  $l = 1, 2$  の不安定性とは異なるタイプのものであり、迎角  $\gamma$  や  $Re$  数が大きくなるほど成長率が大きくなり、その不安定領域が上流方向に向かって広がる。成長率の  $z$  依存性を詳しくみると、迎角が大きくなるにつれて複数の不安定モードが発生することが分かる。

図12に示す  $\alpha_{\max}$  の  $z$  依存性にも最大成長率に対応する  $\alpha_{\max}$  の切り替わりが見られる。図中の黒破線と青破線は、それぞれ  $Re = 1.5, 2.0 \times 10^4$  の軸対称境界層流れにおける  $l = 1, 2$  モードの  $\alpha_{\max}$  を示す。新しい不安定モードの  $\alpha_{\max}$  は黒実線 ( $Re = 1.5 \times 10^4$ ) と青実線 ( $Re = 2.0 \times 10^4$ ) で表されているが、破線とは全く異

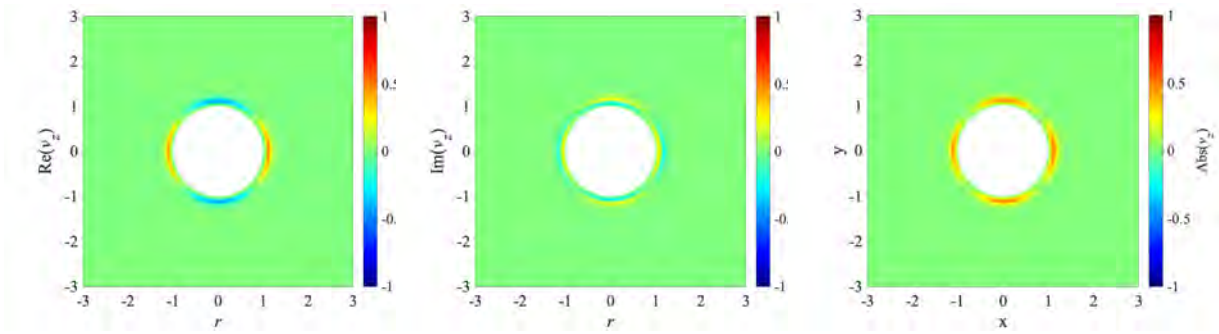


図 7: 固有関数  $v_z$  の断面分布 : 流線形鍍を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.2^\circ, z = 50$  の場合. 左から実部, 虚部, 絶対値.

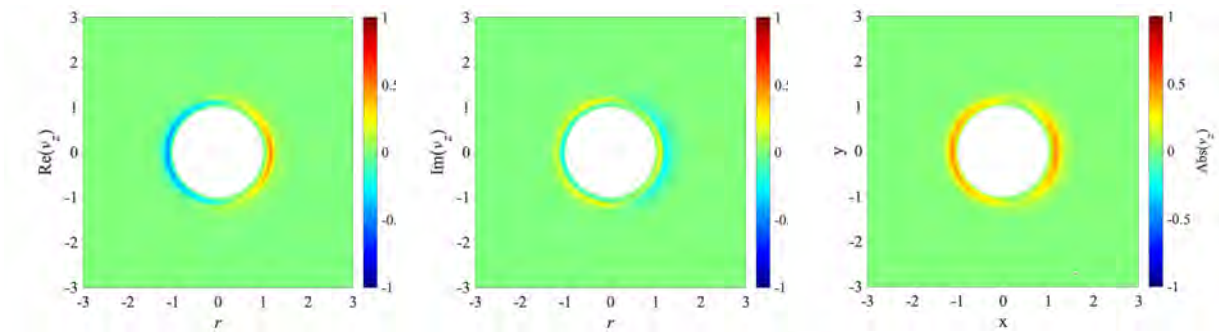


図 8: 固有関数  $v_z$  の断面分布 : 流線形鍍を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.2^\circ, z = 150$  の場合. 左から実部, 虚部, 絶対値.

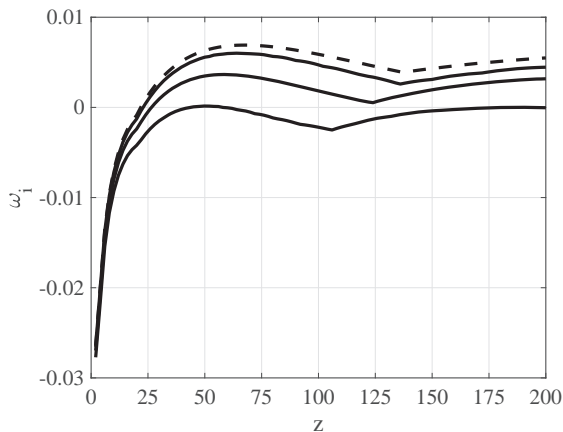


図 9: 局所最大成長率 : 流線形鍍を装着した  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  の境界層流れ : 破線  $\gamma = 0^\circ$ ; 実線  $\gamma = 0.1^\circ, 0.2^\circ, 0.3^\circ$  ( $z = 100$  で上から).

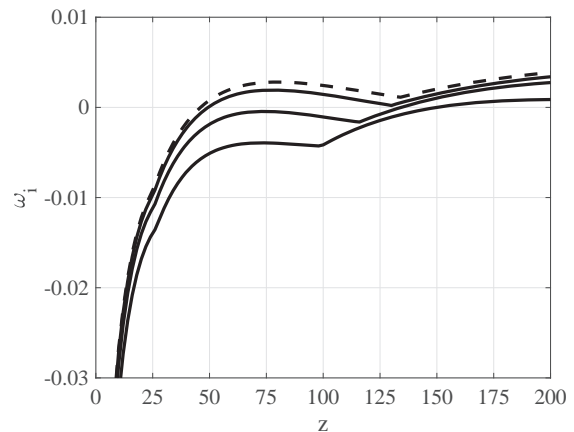


図 10: 局所最大成長率 : 椎型鍍を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \leq 0.3^\circ$  の境界層流れ : 破線  $\gamma = 0^\circ$ ; 実線  $\gamma = 0.1^\circ, 0.2^\circ, 0.3^\circ$  ( $z = 100$  で上から).

なる  $z$  依存性が見られる.  $Re$  数や迎角  $\gamma$  の増加に伴って  $\alpha_{\max}$  は増加するが, 最下流域 ( $z > 170$ ) では  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.6^\circ$  の  $\alpha_{\max}$  と  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma = 0.5^\circ$  の  $\alpha_{\max}$  とがほぼ重なる.

$Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.7^\circ$  の場合には, 不安定モード

の切り替わりが  $z = 164$  で起きており, 図 13 と図 14 に示す不安定モードの  $z$  成分の絶対値の断面分布が異なることから確認される.  $z = 200$  における不安定モードの断面分布は  $z = 150$  における断面分布に比べてより複雑化して, より背側の半径方向に広がっている. 図に



は示さないが,  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.6^\circ, z = 200$  の不安定モードは  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.7^\circ, z = 140$  のものと類似しており, 迎角の増加に伴って下流域に発生する不安定モードが上流域に広がっていくことが分かる.

直接数値計算では,  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma \geq 0.8^\circ, Re = 2.0 \times 10^4, \gamma \geq 0.7^\circ$  の領域で境界層流れは非定常状態となるが, 下流域におけるこれらの不安定モードが非定常化に参与していると考えられる. 大きく迎角のついた流線形鏃を装着した矢周りの境界層流れの不安定化と乱流遷移は, 下流側から徐々に進行することが示唆され, 椎型鏃を装着した場合における乱流遷移メカニズムとは全く異なるようである.

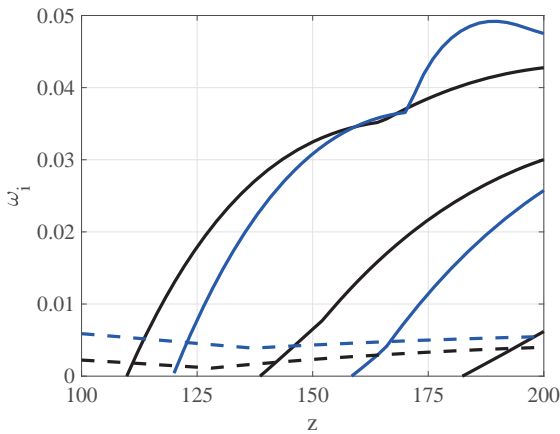


図 11: 局所最大成長率: 流線形鏃を装着した  $Re = 1.5, 2.0 \times 10^4, \gamma \geq 0.5^\circ$  の境界層流れ: 黒破線  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0^\circ$ ; 青破線  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma = 0^\circ$ ; 黒実線  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.7^\circ, 0.6^\circ, 0.5^\circ$  ( $z = 200$  で上から); 青実線  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma = 0.6^\circ, 0.5^\circ$  ( $z = 200$  で上から).

## 5 結言

本研究では, 迎角のついたアーチェリー矢側面の境界層流れに対して, 平行流近似に基づく線形安定性解析を行った. 3次元の直接数値計算から得られた非軸対称流を周回方向に Fourier 級数展開して, 波数  $m = 0, 1, 2, 3$  の成分まで打ち切って基本流とした. 矢の先端には流線形鏃と椎型鏃を装着して,  $Re = 1.5 \times 10^4$  および  $2.0 \times 10^4$  で迎角  $\gamma$  を  $0.1^\circ$  刻みで増加させて定常流となる領域を調べた. 線形攪乱方程式の離散化は半径方向に Chebyshev 選点法, 周回方向には複素 Fourier 級数展開を使用した.

迎角  $\gamma$  が小さい場合 ( $\gamma \leq 0.3^\circ$ ) には, 鏃形状や  $Re$  数にかかわらず, 迎角  $\gamma$  が増加するにつれて成長率は減少した. これは, 基本流の軸対称 ( $m = 0$ ) 成分が迎角とともに変化し,  $\gamma = 0^\circ$  における周回方向波数  $l = 1$  と  $l = 2$  の不安定性が安定化されたためである. しかし,

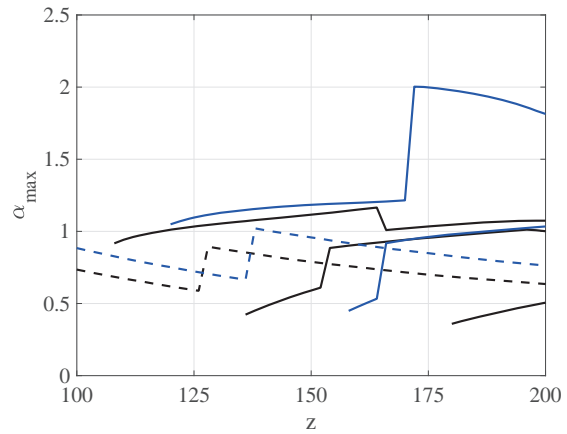


図 12: 局所最大成長率に対応する  $\alpha_{\max}$ : 流線形鏃を装着した  $Re = 1.5, 2.0 \times 10^4$  の境界層流れ: 黒破線  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0^\circ$ ; 青破線  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma = 0^\circ$ ; 黒実線  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.7^\circ, 0.6^\circ, 0.5^\circ$  (上から); 青実線  $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma = 0.6^\circ, 0.5^\circ$  (上から).

椎型鏃をつけた場合, 直接数値計算 ( $Re = 1.5 \times 10^4$ ) では  $\gamma \geq 0.4^\circ$  で境界層流れが非定常化している. また, MSBS 風洞実験でも  $0.4^\circ \leq \gamma \leq 0.6^\circ$  で抗力係数の急増が示されている. これらは椎型鏃後端に発生する剥離泡による逆流域の不安定化に伴うもので, 平行流近似に基づく安定性解析では捉えることができない. 椎型鏃を装着した矢の境界層流れの乱流遷移現象を解明するためには TriGlobal な安定性解析を実施する必要がある.

一方, 流線形鏃をつけた場合には,  $\gamma \geq 0.5^\circ$  で下流域に新しい不安定モードが出現して, その成長率は  $\gamma = 0^\circ$  での不安定性の成長率よりも有意に大きく,  $Re$  数や迎角  $\gamma$  とともに増大した.  $Re$  数や  $\gamma$  の増加とともに, この不安定性を経由した境界層流れの乱流遷移が下流域から上流域に向けて進み, 抗力係数を徐々に増加させると考えられる. 実際, 流線形鏃をつけたクロスボウ矢についての MSBS 風洞実験では, 抗力係数が迎角  $\gamma$  とともに緩やかに増加する測定結果が示されている<sup>12)</sup>. また, 飛翔実験による計測 ( $Re = 2.0 \times 10^4, \gamma \leq 0.5^\circ$ ) で, 流線形鏃を装着した矢の抗力係数が層流値となり, 乱流遷移が起きていないことも整合する. 傾いた矢側面の境界層流れの乱流遷移現象は鏃形状によって全く異なることが分かる.

### 付録 1 基本流の軸対称成分のみに対する安定性解析結果

本付録では迎角が小さい場合に境界層流れが安定化した理由について述べる. 図 15 に流線形鏃を装着した場合の  $Re = 1.5 \times 10^4$  の軸対称成分  $m = 0$  を仮想的な基本流として線形安定性解析を行った結果を示す. 破線は上から  $\gamma = 0^\circ, 0.1^\circ, 0.2^\circ, 0.3^\circ$  の場合の最大成長率をそれぞれ表す. 上流側は周回方向波数  $l = 2$  のモード, 下流側は周回方向波



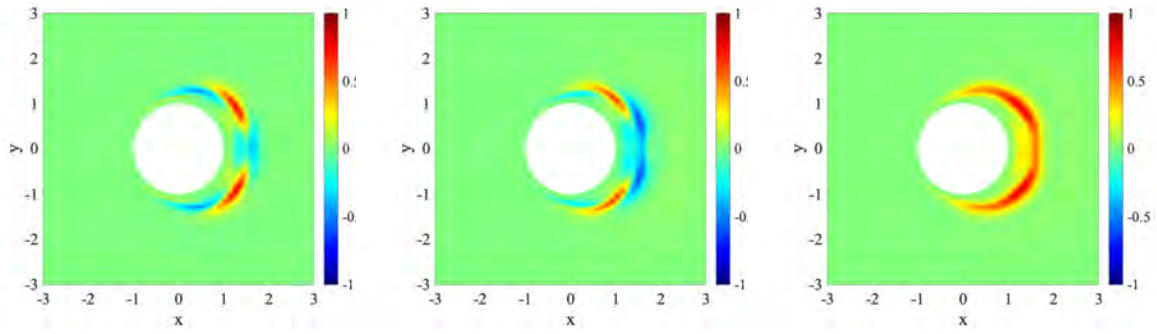


図 13: 固有関数  $v_z$  の可視化：流線形鏃を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.7^\circ, z = 140$  の境界層流れ。左から実部，虚部，絶対値。

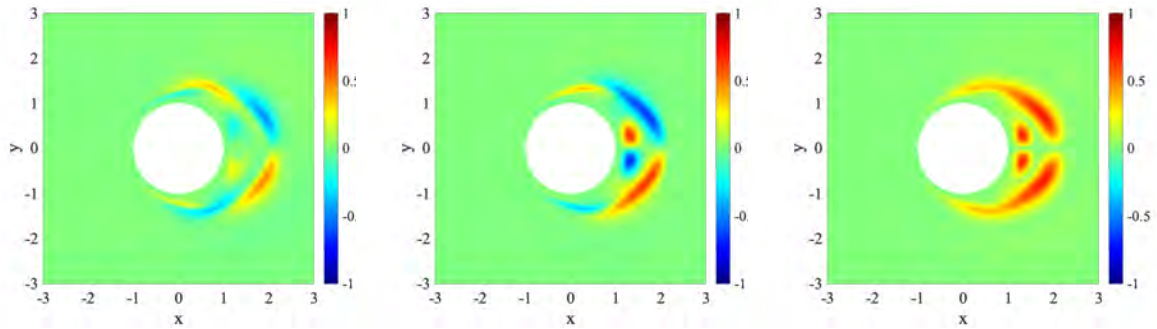


図 14: 固有関数  $v_z$  の可視化：流線形鏃を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4, \gamma = 0.7^\circ, z = 200$  の境界層流れ。左から実部，虚部，絶対値。

数  $l = 1$  のモードに対応する。迎角の増加とともに不安定性の成長率が顕著に減少している。直接数値計算で得られた  $m = 1, 2, 3$  のフーリエ成分を重ね合せた基本流に対する結果（図 5）と比較すると，最大成長率の減少幅が大きくなっていることが分かる。従って，小さな迎角がつくことによって矢周りの境界層流れが安定化される主な原因は，基本流の軸対称成分の半径方向分布が変わることにある。

引用文献

- 1) Miyazaki, T., Mukaiyama, K., Komori, Y., Okawa, Y., Taguchi, S., and Sugiura, H.: Aerodynamic properties of an archery arrow, *Sports Engineering*, **16** (2013) 43-54.
- 2) Miyazaki, T., Matsumoto, T., Ando, R., Ortiz, J., and Sugiura, H.: Indeterminacy of drag exerted on an arrow in free flight: arrow attitude and laminar-turbulent transition, *Eur. J. Phys.*, **38**: 064001 (2017).
- 3) Ortiz, J., Hasegawa, T., Serino, A., Miyazaki, T., and Sugiura, H.: Instability and transition of a boundary layer flow along an arrow: Relaminarization in free-flight tests, XXV ICTAM, 23-28 August 2020, Milano, Italy (2021).

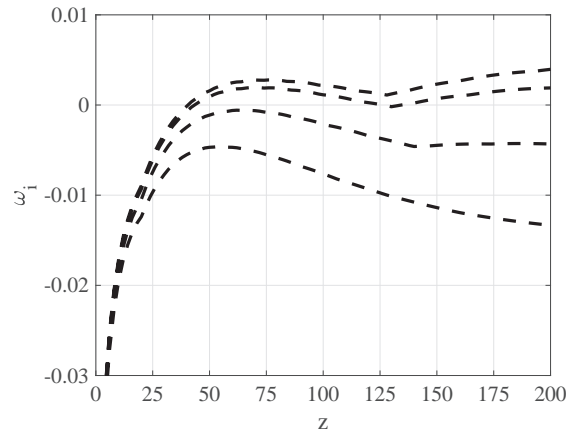


図 15: 局所最大成長率：流線形鏃を装着した  $Re = 1.5 \times 10^4$  の境界層流れの軸対称成分を仮想的な基本流とした場合： $\gamma = 0^\circ, 0.1^\circ, 0.2^\circ, 0.3^\circ$  ( $z = 200$  で上から)。

- 4) Tutty, O. R., Price, W. G., and Parsons, A. T.: Boundary layer flow on a long thin cylinder, *Phys. Fluids*, **14** (2002) 628-637.
- 5) Herrada, M. A., Del Pino, C., and Fernandez-Feria, R.: Stability of the boundary layer flow on a long thin

- rotating cylinder, *Phys. Fluids*, **20**: 034105 (2008).
- 6) Muralidhar, S. D., Pier, B., and Scott, J. F.: Instability of flow around a rotating, semi-infinite cylinder, *Phys. Rev. Fluids*, **1**: 053602 (2016).
- 7) Vinod, N., and Govindarajan, R.: Secondary instabilities in incompressible axisymmetric boundary layers: effect of transverse curvature, *J. Fluids Eng.*, **134** (2): 024503 (2012).
- 8) 長谷川俊成, 宮寄武, 田中健太郎, 高橋直也, 岩津玲磨: アーチェリー矢の側面境界層流れの線形不安定性, *ながれ*, **38** (3) (2019) 208217.
- 9) 伊藤一希, 小野口貴仁, 守裕也, 宮寄武: 矢の側面境界層の2次不安定性, 日本流体力学会年会 2020 講演論文集, (2020) 064.
- 10) 董紫旭, 正藤範一, 伊藤一希, 岩津玲磨, 高橋直也, 宮寄武, 守裕也: アーチェリー用ベアシャフト表面定常流の数値解析, 日本計算工学会論文集, (2022) 投稿中.
- 11) Tezuka, A., and Suzuki, K.: Three-dimensional global linear stability analysis of flow around a spheroid, *AIAA Journal.*, **44** (8) (2006) 1697-1708.
- 12) 鈴木一史, 榊井和典, 向山桂太, 宮寄武, 澤田秀夫: 矢の空力特性—境界層遷移に対する先端形状の影響—, *ながれ*, **29** (4) (2010) 287-296.