ながれ38（2019）370－374

〔連載〕流体力学への招待：日常生活に見られる流体現象

低圧気体の流れ

国立成功大学　数学系　　青　木　一　生*

Flows of Low-Pressure Gases

*Kazuo AOKI, Department of Mathematics, National Cheng Kung University

*E-mail: kazuo.aoki.22v@st.kyoto-u.ac.jp

数年前に日本流体力学会から，一般向けの書物を出版する企画が持ち上がり，その分担執筆を依頼されました．残念ながらこの企画は実現しませんでしたが，その書物用の原稿が「ながれ」に連載記事として掲載されることになりました．以下の本文はそのときの原稿です．もともとは高校生でも分かるようにという依頼でしたので，本文の内容はそのようなものになっています．このため，流体力学研究者を対象とする「ながれ」の記事としてはふさわしくないかも知れません．このことを含んで気軽に読んでいただけると幸いです．

私たちのまわりには，いたるところに空気の流れがあり，瞬間風速が毎秒10メートルであるとか気温が18℃だとかで，空気の様子をごく普通に表現しています．ところが，中学校や高校の物理や化学で習うように，空気あるいはもっと一般に気体は，非常に多くの分子の集まりです．ロシュミット数として知られているように，0℃，1気圧の理想気体1立方メートルには，2.686×10^{25}個の分子が含まれています．この分子がいろいろな速度で，互いに衝突を繰り返しながら飛び回っています．ここで衝突というのは，2個の気体分子が非常に接近し，分子間に働く分子間力とよばれる力の影響を受けて，互いに速度を変えるプロセスのことです．ただし，気体分子がパチンコ玉のような球形の硬い物質で，互いにぶつかったときには弾性的に反射する，というふうに考えてもほぼ間違いありません．常温，常圧の気体では，気体分子は高速で飛び交い，しかも非常に頻繁に衝突しています．分子の平均速さは音の速さつまり秒速300メートル程度に達しますが，一つの衝突から次の衝突までに移動する距離の平均（これを平均自由行程といいます）はわずか0.00001ミリメートルほどです．

高速運動と頻繁な衝突，こんなドラマティックなことがまわりで起こっていて，私たちの体にもたくさんの分子が衝突しているわけですが，私たちは分子の個々の衝突による衝撃を感知することができません．それは分子の大きさや質量があまりに小さくて衝突と衝突の間の時間があまりに短いからです．そのかわり私たちは，衝突と衝突の間の時間に比べてうんと長い時間，といっても私たちの感覚では一瞬なのですが，にわたっての衝撃の平均値を感知することができます．これが圧力なのです．

空間のある一点のまわりにごく小さな仮想的な箱を考えましょう．この箱は，私たちの感覚からすると大きさのないほど小さなものですが，中には依然として多数の分子が含まれているようなものです．ある瞬間にこの箱の中に含まれる多数の分子は様々な速度をもっています．ある速度をもった分子が何個あるかを考えると，たとえば図1のような分布が描けます．分子は3次元の空間を飛び回っているので，その速度$\boldsymbol{v}$は三つの成分をもつベクトル$\boldsymbol{v}=(v_x, v_y, v_z)$ですが，ここでは簡単のため，一方向つまり$x$方向の速度$v_x$のみをもつがごとく描いてあります．この速度分布は気体の振舞いを理解するのに重要な概念です．うんと速い分子，つまり$|v_x|$が大きい分子の数は少ないので，分布は両側でゼロに近づきます．この分布には平均の速度u_xがあります．私たちが東向きに毎秒10メートルの風というふうに感知する気体の流れの速度は，この平均速度にほかなりません．

それでは，分子どうしの衝突が非常に頻繁な常圧，常温の気体では，気体分子の速度分布はどのようになるのでしょうか．実はこのときには，分布は図2に示すような釣鐘型（ベル型の方が良いかもしれませんが，ここでは釣鐘型とよぶことにします）になります．これは図1同様，1次元的に描いた模式図で，v_x以外の成分v_y，v_zについても同じ分布をしており，実際は図中の式のようになります．この分布を，英国の物理学者マクスウェル（J. C. Maxwell）にちなんで，マクスウェル分布と呼びます．この分布の平均速度は$\boldsymbol{u}=(u_x, u_y, u_z)$で，平均速度からの分布の広がりの目安である標準偏差は，速

度の各成分について $2kT/m$ の平方根です．ここで，k はオーストリアの物理学者ボルツマン（L. Boltzmann）にちなんでボルツマン定数とよばれる定数で，その値は $1.3806 \times 10^{-23} \mathrm{m}^2 \cdot \mathrm{kg} \cdot \mathrm{s}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ です．また，T は絶対温度，m は分子 1 個の質量です．したがって，温度が高い気体とは，平均速度のまわりの分布が広い状態の気体，言いかえると平均速度 $\boldsymbol{u}$ で移動している観測者から見たときに速い分子が多い気体ということになります．一方，強い風に相当する速い流れは，平均速度 $\boldsymbol{u}$ の大きさ $|\boldsymbol{u}|$ が大きな気体です．あと，式中の n は気体分子が単位体積当たり何個あるかを表す量で，分子の数密度といいます．これは図 2 の分布の曲線と v_x 軸で囲まれた部分の面積に対応します（正確には分布で囲まれた 3 次元空間における体積ですが，表現しにくいので図 2 で概念的説明をしています）．密度の低い気体では，図 2 の分布の高さが低くなります．この釣鐘型の速度分布が実現しているとき，気体は平衡状態にあるといいます．

常圧，常温の気体では，気体分子の速度の分布がマクスウェル分布，つまり図 2 のような釣鐘分布をしていると言いましたが，風の強さや温度は場所によって違いますし，同じ場所でも時間が経つと変化します．これは，マクスウェル分布中の n，$\boldsymbol{u}$，T が時間や場所によって変化することに対応します．つまり，釣鐘型の分布を保ったまま，平均速度の位置，分布の広がり具合，分布の高さが場所によって，また時間の経過とともに変化するわけです．このような状態が実現しているとき，気体は局所的に平衡状態であるといいます．このときには，n，$\boldsymbol{u}$，T の場所と時間による変化の法則さえ分かると，気体の速度分布は完全に決まり，気体の状態がすべて分かったことになります．局所的に平衡状態にある気体に対して，この法則を追及する学問が，気体力学あるいは（気体を対象としたときの）流体力学です．ただし，気体が厳密に局所的な平衡状態にあると，気体中の粘性や熱伝導性は生じません．粘性や熱伝導性を考慮した気体力学は，局所的な平衡状態に非常に近いけれど，それから少しずれた速度分布の気体を扱っていることになります．

それでは，どのようなときに気体分子の速度分布が釣鐘型のマクスウェル分布ではなくなる，つまり局所的な平衡分布ではなくなるのでしょうか．一口で言うと，それは密度の低い気体で起こります．気体の中にごく小さな仮想的な体積を考えましょう．常圧の気体では，この小さな体積の中で非常に多くの衝突が起こっていて，その中の分子が互いに十分になじんだ状態になっています．これが局所的な平衡状態です．ところが，たとえば真空装置の内部では気体の密度が低いため，分子どうしの衝突の機会はぐんと減り，平均自由行程が長くなります．そのため，少し離れたところの別の場所，たとえば温度が高い場所から，衝突を経験せずにこの小さな体積にやって来る分子が出てきます．そのような分子の数が多くなると，仮想的な体積内の気体分子の速度分布は釣鐘型すなわち局所マクスウェル分布からずれた形になります．たとえば，図 1 のような分布がそれですが，このときにも曲線と v_x 軸で囲まれた面積（体積）は数密度 n ですし，平均速度 $\boldsymbol{u}$ も存在し，標準偏差に対応させて温度 T を定義することができます．しかし，局所マクスウェル分布とちがって，たとえ n，$\boldsymbol{u}$，T が同じでも無数の形が違う分布があり得ます．つまり，このときには，n，$\boldsymbol{u}$，T が分かっても気体の状態が分かったことにはなりません．別の言い方をすれば，n，$\boldsymbol{u}$，T だけを扱う普通の気体力学は役に立たず，気体分子の速度分布を直接扱う学問が必要になります．これが気体分子運動論で，それにもとづいて気体の流れを研究する学問分野を分子気体力学，あるいは希薄気体力学といいます．常圧の気体でも，それが非常に小さな装置のなかにあると，やはり分子気体力学の出番になります．実際，マイクロマシンとよばれる装置の中には，常圧での気体の平均自由行程とあまり変わらない大きさのものがあり

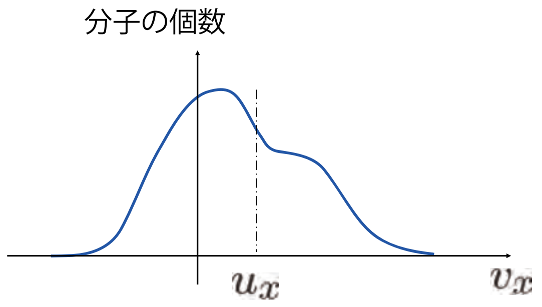

図 1　気体分子の速度の分布

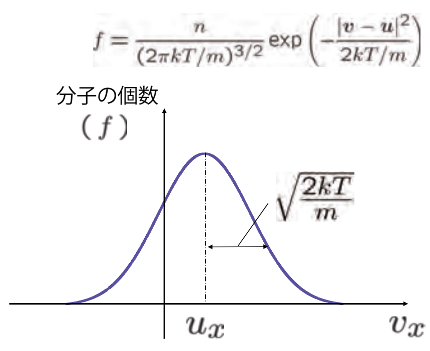

図 2　気体分子の釣鐘型速度分布

ます．その内部の気体では，分子が他の分子と何度も衝突する前に装置の壁に当たってしまい，やはり局所的な平衡状態にはなりません．このように，局所的な平衡状態になっているかどうかは，気体分子の平均自由行程と装置の代表的な長さの比によって決まります．この比をデンマークの物理学者クヌーセン（M. Knudsen）にちなんでクヌーセン数と呼びます．局所的な平衡状態は，クヌーセン数がほとんどゼロであるときに実現しています．

それでは，気体が局所平衡状態からずれると何が起こるのでしょうか．その例を一つ挙げましょう．皆さんはラジオメータとよばれる図 3 のような装置というか「おもちゃ」を見たことがあると思います［発明者のイギリスの化学者クルックス（W. Crookes）の名をつけてクルックスのラジオメータとよばれることもあります］．密閉されたガラス球の中に 4 枚の羽根がついた羽根車が取り付けられており，羽根車は自由に回転できるようになっています．これを直射日光に当てると，羽根車は回転をはじめ，すぐに回転数が数えられないほどの速さになります．完全に密閉されているのに，どうして羽根車が回るのでしょうか．トリックが 2 つあります．まず，ガラス球の中の空気が真空ポンプで引かれており，中の気体は低圧状態になっています．ただし，普通のガラス球がつぶれずにもちこたえる程度ですので，それほどの低圧ではありません．平均自由行程がせいぜい 0.01 から 0.1 ミリメートル程度です．もう一つのトリックは，金属製の羽根の片面が光沢のない黒色に塗られていることです．この装置に光を当てると，黒い面がより多くのふく射を吸収して温度が上がり，反対側の光沢面との間で温度差が生じます．つまり，低圧気体の中におかれた両面で温度差のある板（羽根）になぜ力が働くかという問題にたどり着きます．

図 3　ラジオメータ

この現象に対する普通の説明は次のようなものです．板の高温面に当たった分子は高温面でエネルギーを得て，もとの速さよりも速くなって板を飛び出します．一方，低温の光沢面では，面に当たる前と後とでは速さの変化はありません．片側から速い分子が飛び出すので，ロケットと同じで板にはその反対側つまり光沢面に向かって力が働き，羽根はその方向に動きます［図 4(a)］．この説明はもっともらしく，実際に気体が非常に低圧で分子どうしの衝突がほとんどない場合には正しいです．しかし，ガラス球の内部はそれほど高真空ではないので，分子どうしの頻繁な衝突が起こっています．このとき，板の高温面を飛び出した速い分子は，板に向かってやって来る遅い分子と衝突し，これを “蹴散らし” ます［図 4(b)］．その結果，高温面に到達できる分子の数が減り，高温面を飛び出す速い分子の数自体も少なくなります．片側の面からいくら速い分子が飛び出しても，その数が少なければ，ロケット効果は小さくなり，羽根にはほとんど力が働きません．実際，羽根の中央部ではこのようなことが起こっています．ところが，羽根の端に近いところでは，“蹴散らし” 効果で板の正面［図 4(c) の右側］から高温の面に到達する分子は減りますが，“蹴散らし” 効果の弱い横側［図 4(c) の上側］から十分な分子が高温面に到達し，入射分子の減少分，したがって高速で高温面を飛び出す分子の減少分を補います．このため，羽根の端に近い部分では，ロケット効果が働き，これによって羽根は光沢面の方向に動きます．

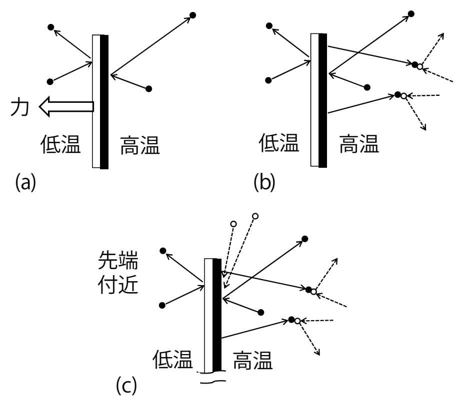

図 4　力のメカニズム

ラジオメータの場合には羽根が動きますが，羽根を止めておくとガラス球内の気体には複雑な流れが起こります．普通の液体や気体でも，下部の液体や気体を温めると対流が起こることはみんな知っています．ただし，持続的な対流を起こすには，重力が働いていることが条件です．もし重力が働いていなければ，持続的な流れは起こりません．これに対して，低圧気体では，重力なしでも気体を部分的に加熱したり冷却したりすることで持続的な流れを起こすことができます．ラジオメータの羽根のまわりの流れがその例なのですが，これは流れの

観点からは少し複雑なので，もう少し単純な例を見てみましょう．

図5のような壁があり，壁に沿って温度が緩やかに変化していて，左側で温度が低く，右側で高いとしましょう．そうすると，壁に接する気体の温度も左側で低く，右側で高くなります．低圧の気体ではこのとき，低温側から高温側に壁に沿った流れが起こります．これを熱ほふく流（Thermal creep flow）とよびます．その仕組みをごく簡単に説明しましょう．そのために，壁に当たった分子がどのように反射するかを少し述べておきます．分子のスケールで見ると，壁の表面は隙間だらけで，分子は壁の内部に入り込み，壁を形成する分子と相互作用します．その結果，大部分の分子は壁の状態になじみ，どのような速度で壁にやってきたかを忘れて，すべての方向にまんべんなく気体中に戻っていきます．これが気体分子の反射です．実際には，気体分子の反射の法則はそう簡単なものではなく，壁や入射分子の性質によって変化します．ただ，壁の外側の気体が極超音速であるとか分子線が壁に照射されるとかの極端な場合を除いて，上で述べた反射の法則はほぼ正しいと考えられています．

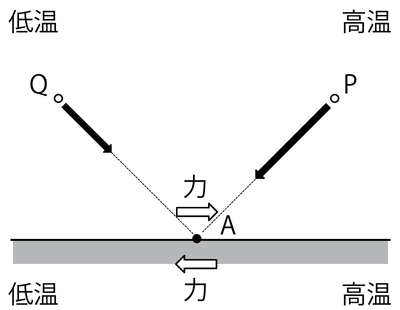

図5　熱ほふく流のメカニズム

さて熱ほふく流の話に戻りましょう．壁上の点Aには全方向から分子がやってきますが，右側からやってくる分子を右斜め45度つまりP点からの分子で，左側からやってくる分子を左斜め45度つまりQ点からの分子で代表させましょう．APおよびAQの長さは平均自由行程程度とします．気体の温度はP点で高く，Q点で低いので，P点からくる分子の方がQ点からくる分子よりも，平均的に速いことになります．このため，入射分子によってA点での壁は左方向により大きなインパクトを受けます．一方，反射分子は全方向にほぼまんべんなく反射されるので， 壁に働く力にはほとんど影響しません．このため，壁には左方向の力が働きます．ということは，作用反作用の法則によって，壁近くの気体には右方向の力が働きます．壁が動かないとすると，この力によって気体は右方向，つまり温度の低い方から高い方に向かって流れます．これが熱ほふく流です．

それでは，なぜ低圧気体に限ってこの現象がおこり，常圧気体では起こらないのでしょうか．AP，AQの長さ，したがってPQ間の距離が平均自由行程程度であったことを思い出してください．この現象には，平均自由行程程度の距離である程度の温度差があることが本質的です．たとえば，壁に沿って1センチメートル程度の長さで温度差がついているとしましょう．常圧気体なら，平均自由行程は0.00001ミリメートルほどなので，図5のPQ間の距離はその程度です．したがってPQ間には温度差がほとんどなく，上で説明したメカニズムは働きません．ところが，平均自由行程が1ミリメートル程度の低圧気体では，PQ間の距離が1ミリメートル程度ですので，PQ間にはそこそこの温度差があります．したがって，上で述べたメカニズムが働き，熱ほふく流が起こります．もちろん，容易ではありませんが，常圧気体でも0.00001ミリメートルの間隔にある程度の温度差を付けることができれば，熱ほふく流は起こります．

以上でお話の形で述べたことを，定量的に正確に理解するには，気体分子の速度分布を支配する方程式を具体的に解かなければなりません．この方程式は，前出のボルツマンが1872年に提案したもので，ボルツマン方程式と呼ばれています．これが分子気体力学の基礎方程式です．この方程式でクヌーセン数が小さな極限を考えることにより，巨視的な流体力学の方程式（いわゆるオイラーの方程式やナヴィエ-ストークスの方程式）を導くことができます．同時に，粘性や熱伝導性の物理的な起源も明らかになります．この意味で，分子気体力学は（気体に対する）普通の流体力学を極限として含むより一般的な学問です．低圧気体やマイクロスケールの系における気体というと，何か極限状態の気体，特殊な状況の気体というふうに思われがちですが，実際は，私たちが感知できる「普通の気体」がより一般的な状況の気体の極限状態です．いいかえると，私たちが平均自由行程が非常に短く，局所的な平衡状態に非常に近いという極限状態の気体の中に住んでいるわけです．

ボルツマン方程式は非平衡統計力学の分野における重要な方程式ですが，その形が複雑で構造が難しいため，現実的な問題に応用されるようになったのは半世紀少し前からです．現在では，さまざまな解法が工夫され，低圧気体やマイクロスケール装置内の気体の流れを調べるのに多く用いられています．たとえば，スペース・ビークルの大気圏再突入時に働く抗力や発生する熱の問題，真空ポンプや真空装置の中の気体の流れの問題，熱によるマイクロマシン内の流れの制御などです．また，数学的研究の重要な対象でもあり，この方程式の数学的研究その他によって，1994年にはPierre-Louis Lions

（Collège de France 教授）が，2010 年には Cédric Villani（前 Henri Poincaré 研究所所長，現フランス国民議会議員）が，それぞれフィールズ賞を受賞しました．それから，二つの個体（粒子とよぶことにしましょう）が近づいたときに何らかの相互作用をして速度を変える場合，その速度変化の法則をモデル化し，その粒子の集団の速度分布を考えることによって，ボルツマン方程式に似た形の方程式が作れます．そのような粒子の集団の例としては，バクテリアの集団，鳥や魚の群れ，星の集団，自動車や歩行者の集団など，さまざまな可能性があります．ボルツマン方程式に似た方程式によるこのような粒子集団のダイナミクスの研究は，広い意味でのボルツマン方程式の新しい応用で，広い分野で多くの研究がおこなわれています．