

〔原著論文〕

アーチェリー矢の側面境界層流れの線形不安定性

* 電気通信大学大学院 情報理工学研究科	長谷川 俊 成 [†]
電気通信大学大学院 情報理工学研究科	宮 嵩 武
東京電機大学大学院 工学研究科	田 中 健太郎
東京電機大学大学院 工学研究科	高 橋 直 也
東京電機大学大学院 工学研究科	岩 津 玲 磨

Linear instability of the boundary layer flow along an archery arrow

Toshinari HASEGAWA, The University of Electro-Communications

Takeshi MIYAZAKI, The University of Electro-Communications

Kentaro TANAKA, Tokyo Denki University

Naoya TAKAHASHI, Tokyo Denki University

Reima IWATSU, Tokyo Denki University

(Received 8 November 2018; revised 4 February, 2019; accepted 24 April, 2019; published 25 June 2019)

The linear instability of the boundary layer flow formed along an archery arrow is investigated based on the parallel flow approximation. The present study covers a Reynolds number range $1.0 \times 10^4 \leq Re \leq 2.0 \times 10^4$ (diameter of the arrow shaft being used as the length scale), whose highest value corresponds to a typical arrow velocity shot from a recurve bow. Two types of points, i.e. streamlined point and bulge, are attached to the arrow head and the axisymmetric basic flows are numerically computed by a stream function-vorticity method. The linear disturbances are Fourier decomposed in the axial and azimuthal directions. A Chebyshev collocation method is used in the radial discretization. The most quickly growing mode has the azimuthal wave number $m = 2$ and the second and third modes are with $m = 1$ and $m = 3$, respectively. We find that the axisymmetric mode with $m = 0$ never grows in the studied Reynolds number range. These results are common to two types of points. The estimated N -value is less than 2.5 even at $Re = 2.0 \times 10^4$, indicating that the boundary layer may remain laminar, if the arrow aligns with the local wind, as was observed in the previous MSBS wind tunnel tests of our group. It is also indicated that the laminar-turbulent transition found in our free flight experiments might be a result of bypass transition process caused by a small angle of attack of the arrow inflight.

(KEY WORDS): Archery arrow, Boundary layer flow, Linear instability, Parallel flow approximation, e^N method

1 緒言

オリンピックでのアーチェリーは70 m先の的を狙う得点競技であり、メダルを目指すためには直径12.2 cm

* 〒182-8585 東京都調布市調布ヶ丘1-5-1

[†]E-mail: t.hasegawa@uec.ac.jp

の中心円を射貫くことが求められる。競技者の放つ矢の速度 U はおよそ 60 m/s で、矢の直径 $d = 2a$ (a は半径) を代表長とした Re 数 ($Re = Ud/\nu$: ν は空気の動粘性率) は約 2.0×10^4 となる。飛翔中の矢に働く空気抵抗は大きく重力の 0.5 倍を超えるが、その半分以上は矢のシャフトに働く摩擦抵抗からの寄与で、残りは矢羽に働く空気抵抗である。矢側面の境界層流れが層流である場合と乱流である場合では空気抵抗が有意に異なり、鉛直方向に 20 cm 程度の的ずれが生じる。このような矢の飛翔時の乱流遷移の詳細なメカニズムを解明して、それを制御することはスポーツ流体力学の観点からも重要である。

矢の側面の境界層流れに関する実験的な研究として、Park *et al.*¹⁾ の水槽実験が知られている。椎型鏃をつけたアーチェリー矢のシャフト側面の境界層を可視化し、 $Re = 2.74 \times 10^4$ では先端から乱流境界層になることを示した。

一方、矢の空力特性の定量的な測定は、JAXA の 60 cm 磁力支持天秤装置付き風洞 (MSBS 風洞) を用いた実験や飛翔実験によって行われている。鈴木ら²⁾ はクロスボウ (細長比 57) の矢の抗力係数 C_D 、揚力係数 C_L 、ピッチングモーメント係数 C_M を求めた。測定された $10^4 \leq Re \leq 5 \times 10^4$ の範囲では、境界層の状態は鏃形状に依存することが示された。流線形鏃の場合には層流境界層であり、椎型鏃および凹凸型鏃を装着した場合は境界層は乱流状態となった。

アーチェリー競技者の使用する Easton 社製の A/C/E 矢の空力特性は Miyazaki *et al.*^{3,4)} の支持干渉のない実験により詳細に調べられている。JAXA の MSBS 風洞を使用した測定では、鏃形状に関わらず矢を気流に対して平行に置く場合には $Re \leq 1.3 \times 10^4$ で境界層は層流となる。一方、椎型鏃を装着した矢を気流に対して 0.75 度傾けた場合には、 $Re = 1.1 \times 10^4$ 付近で乱流遷移することが示された。また、圧縮空気によって矢を発射する飛翔実験結果は、椎型鏃を装着した場合は $1.3 \times 10^4 < Re < 1.8 \times 10^4$ の領域で C_D が層流境界層に相当する値 ($C_D \sim 1.5$) と乱流境界層に相当する値 ($C_D \sim 2.7$) に二値化し、流線形鏃の場合ではこの乱流遷移領域がより高 Re 数領域 ($1.3 \times 10^4 \leq Re \leq 2.4 \times 10^4$) に広がった。Miyazaki *et al.*⁴⁾ は C_D の二値化の原因が矢の迎角のばらつきにあることを指摘し、矢の迎角が気流に対して ± 0.6 度以上つくると境界層が乱流遷移すると指摘した。実際、迎角がつかないように放たれた椎型鏃の矢の C_D は、遷移領域の $Re = 1.7 \times 10^4$ でも層流値 ($C_D = 1.34$) となることが確認されている。これらの実験結果を理論的に説明するための第一段階として、境界層流れの線形安定性を調べるのが本論文の目的

である。

円柱側面の境界層流れの線形安定性については Tutty *et al.*⁵⁾ による平行流近似に基づいた局所的な線形安定性解析が知られている。彼らは最も低い臨界 Re 数 ($Re_c = 2120$) を与える不安定モードが周回方向波数 $m = 1$ のモードであることを示した。また、 $m = 0, 2, 3$ のモードの臨界 Re 数はそれぞれ $Re_c = 24878, 12140, 20204$ であることが示された。アーチェリー矢の Re 数領域ではこれらの不安定モードが成長する可能性がある。また、飛翔中の矢は矢羽の効果によって 100 rps 程度で回転しており、無次元回転数 ($Sp = \pi df/U \sim 0.03$: f は回転数) は小さいものの、その影響も調べる必要がある。Muralidhar *et al.*^{6,7)} は対称軸周りに回転する円柱側面の境界層流れに対して、平行流近似に基づく線形安定性解析を行い、線形不安定性成長率は非回転時に比べて顕著に大きくなることを示している。また、Herrada *et al.*⁸⁾ は非平行流効果を放物化された安定性方程式 (PSE) に基づいて調べている。しかしながら、これらの理論的研究では非常に細長い (細長比 10^5) 円柱の下流側が主な解析対象とされたため、先端では Blasius 境界層が仮定されており、鏃形状の影響は考慮されていない。したがって、細長比が 120 程度のアーチェリー矢側面に発達する境界層流れに焦点を絞った線形安定性解析を実行しなおす必要がある。

本論文では、2つの鏃形状 (流線形鏃と椎型鏃) を反映した軸対称基本流を精密に計算し、その線形安定性解析を平行流近似に基づいて行う。基本流として、鏃を装着した矢羽無しの矢 (ベアーシャフト) を想定し、シャフトは回転しないもの ($Sp = 0$) として計算を行う。線形安定性の解析手法は、Muralidhar *et al.*⁶⁾ の高精度な手法に従う。軸方向 (波数 α) と周回方向 (波数 m) についてスペクトル分解し、半径方向の離散化には Chebyshev 選点法を使用する。得られた解析結果に基づいて Miyazaki *et al.*^{3,4)} の実験結果を考察する。特に、不安定性をもたらす攪乱モードについて N 値を評価し、乱流遷移との関係を議論する。

2 軸対称基本流の数値計算

流線形鏃および椎型鏃を装着したベアーシャフトを過ぎる基本流の計算を行う。シャフト部分は円柱とみなし、半径を a として長さが $240a$ (細長比 120) になるように設定する。以下では a を長さスケール、一様流速 U を速度スケールとして基礎方程式を無次元化する。また、矢筈 (矢後端) は半球とする。座標系は矢軸方向を z 、半径方向を r 、周回方向を θ として、鏃の付け根を原点にとる。軸対称基本流成分を $(U_z, U_r, 0)$ とする

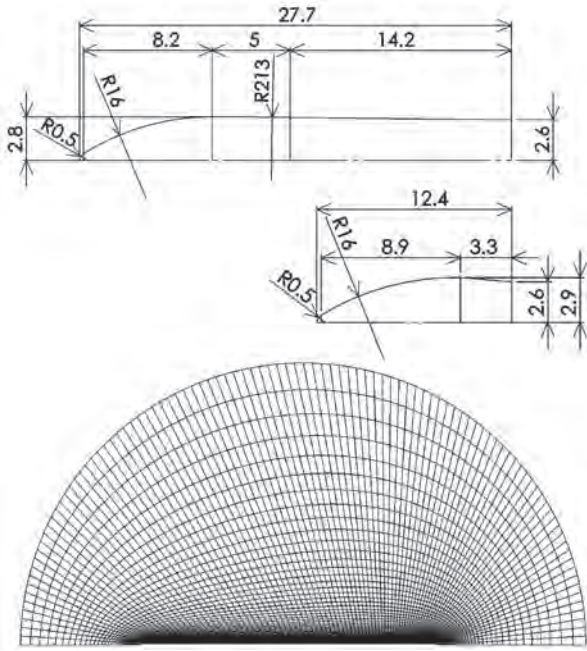


図1 鏃(実寸 mm)の概形(上: 流線形鏃, 中: 椎型鏃)および流線形鏃を装着したペアーシャフトの計算格子(下)。

とき, Stokes の流れ関数と周回方向の渦度成分,

$$U_r = -\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial z}, \quad U_z = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \omega = \frac{\partial U_r}{\partial z} - \frac{\partial U_z}{\partial r} \quad (1)$$

を導入すれば, 軸対称基本流の基礎方程式は ψ, ω の関係式および渦度輸送方程式で表される。

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = -r\omega \quad (2)$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial t} + \frac{\partial(U_r \omega)}{\partial r} + \frac{\partial(U_z \omega)}{\partial z} = \frac{2}{Re} \left(\frac{\partial^2 \omega}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{\partial^2 \omega}{\partial z^2} - \frac{\omega}{r^2} \right) \quad (3)$$

式(3)右辺の Re 数は直径を代表長さとしている。上式(2,3)を時間発展させて, 定常解を求める。計算に使用するのは時間4次, 空間4次精度の差分法コード⁹⁾で, 空間方向には一般座標変換を行い, メトリクス成分および計算平面での導関数はともに4次の中心/片側差分で近似する。式(2)は3レベルのマルチグリッド法で解き, 式(3)は Carpenter - Kennedy による5段4位の低容量ルンゲ・クッタ法¹⁰⁾で時間積分する。

物理平面 (z, r) に対して計算平面を (ξ, η) として O-型格子を生成する。矢(鏃とシャフトおよび矢筈)表面に沿う方向を ξ , 矢表面で ξ 線と直交し表面から離れる方向を η とおけば, 矢表面は $\eta = 1$, 遠方境界は $\eta = N_\eta$, 鏃前方および矢筈後方の対称軸はそれぞれ $\xi = 1, \xi = N_\xi$ で表される。ここで, 遠方境界はシャフト中点より $10a$ だけ後方の点を中心とする半径 $240a$ の半円とした。こ

のとき, 境界条件は矢表面で流速が 0, 遠方で一様流, 軸上で対称条件となり, ψ と ω に対して計算平面上において以下の式で与えられる。

$$\psi = 0, \quad \psi_\eta = 0, \quad \omega = -\frac{\gamma}{rJ^2} \psi_{\eta\eta} \quad (\eta = 1) \quad (4)$$

$$\psi = \frac{1}{2} r^2, \quad \omega = 0 \quad (\eta = N_\eta) \quad (5)$$

$$\psi = 0, \quad \omega = 0 \quad (\xi = 1, \xi = N_\xi) \quad (6)$$

ただし, $\gamma = r_\xi^2 + z_\xi^2, J = r_\xi z_\eta - r_\eta z_\xi$ である。

格子生成には Eiseman による 4 平面補間法¹¹⁾を使用した。格子点数は $N_\xi \times N_\eta = 1201 \times 301$ とする。鏃の形状モデルは CAD データに自然スプラインと Vinokur の集中関数¹²⁾を用いて作成する。矢表面における η 方向の最小格子幅は 2.0×10^{-3} , ξ 方向の最小格子幅は 2.0×10^{-2} とする。図1に, 実寸の流線形鏃と椎型鏃の概形(単位: mm) および, 作成した計算格子を示す。鏃の, 半径による無次元長さは流線形鏃が 11, 椎型鏃が 4.8 となる。また, 計算格子は ξ 方向を 12 本毎に, η 方向を 4 本毎に描画している。

初期条件は一様流とする。時間刻みは $\Delta t = 1.0 \times 10^{-3}$ に設定する。 Re 数は $Re = 1.0 \times 10^4, 1.2 \times 10^4, 1.4 \times 10^4, 1.6 \times 10^4, 1.8 \times 10^4, 2.0 \times 10^4$ とした。定常解と判定する基準は, すべての格子点において時間ステップ n と次ステップ $n+1$ での U_z の相対変化量の絶対値が 1.0×10^{-4} 以下になった場合とした。 $0 \leq t \leq 1200$ の間で $z = 50, 100, 150, 200, r-1 = 0.2$ における U_z, U_r の時刻歴は t に関してそれぞれ単調に減少/増加しながら一定値に漸近する挙動を示した。定常解に到達した時刻は, $Re = 2.0 \times 10^4$ において流線形鏃, 椎型鏃ともに $t \approx 1200$ であった。

図2に, 流線形鏃の場合に対する, 軸方向の速度成分 U_z を $z = 0, 50, 100, 150, 200$ において示す。同じ位置における U_r の速度分布では $z = 0$ において表面に向かう弱い流れがあり, $z = 50$ において $r-1 \approx 0.2$ で表面から離れるごく弱い流れがある。しかし, $z \gtrsim 100$ において U_r の値は $O(10^{-3})$ 以下の大きさとなる。

図3に, 椎型鏃の場合に対する U_z の分布を図2と同じ位置において示す。図3の $z = 0$ からわかるように, 椎型鏃では鏃の付け根に逆流領域が生じる。可視化図(省略)からは, 鏃表面で剥離し, シャフト表面で再付着する扁平な剥離泡がみとれる。剥離泡の長さは, ここで調べた Re 数の範囲ではほぼ Re に比例して長くなり, $Re = 1.0 \times 10^4$ において $-0.8 \leq z \leq 0.6$, $Re = 2.0 \times 10^4$ において $-1.0 \leq z \leq 1.6$ が逆流領域となっている。 U_r の分布は, $z = 0$ 以外の位置において流線形鏃とほとんど類似の図となる。逆流領域が発生する影響と椎型鏃が流線形鏃よりも短いために, 椎型鏃の

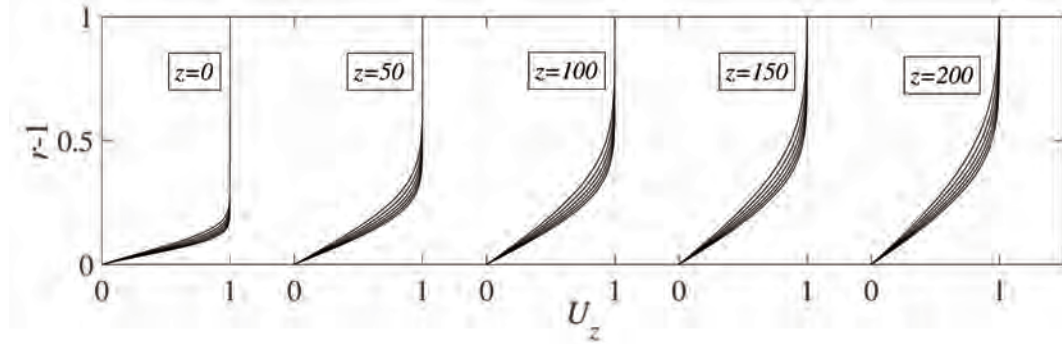


図2 z 軸方向の流れ $U_z(r, z)$. 流線形鎌. $Re = 1.0 \sim 2.0 \times 10^4$.

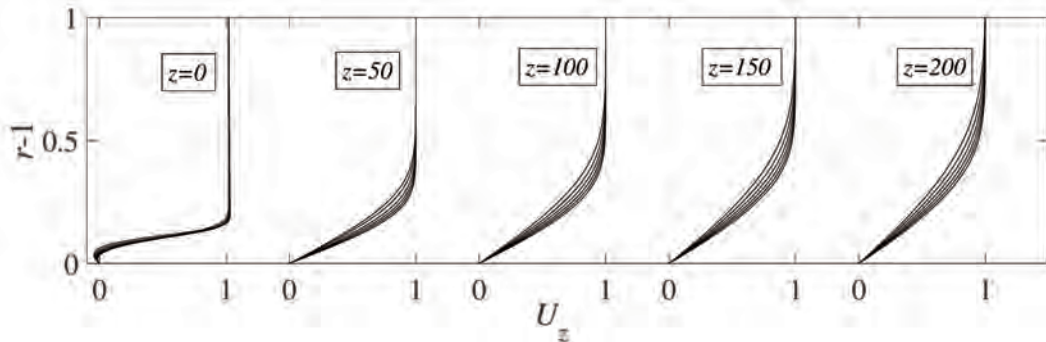


図3 z 軸方向の流れ $U_z(r, z)$. 椎型鎌. $Re = 1.0 \sim 2.0 \times 10^4$.

境界層厚さは $0 < z \lesssim 60$ で流線形鎌のそれより薄くなるが、 $60 < z$ では両者の差はほとんどなくなる。軸方向の圧力勾配は鎌の部分を除いてほぼ0である。

3 平行流近似に基づく線形安定性解析

基本流計算で得られた主流 $(U_z, U_r, 0, P)$ に、微小攪乱 (u_z, u_r, u_θ, p) を加えて、その時間発展を調べる。平行流近似では U_z の軸方向依存性を無視し、 U_r は U_z に比べて十分に小さいとして無視する。平行流近似での主流は半径方向のみに依存するため、線形攪乱を軸方向と周回方向でスペクトル分解できる。速度と圧力の攪乱 u, p は以下のように記述される。

$$\begin{pmatrix} u_z \\ u_r \\ u_\theta \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_z(r) \\ v_r(r) \\ v_\theta(r) \\ q(r) \end{pmatrix} \exp[i(\alpha z + m\theta - \omega t)] \quad (7)$$

ここで、 α は実数であり攪乱の軸方向の波数、 m は整数で周回方向の波数を表す。 ω は複素周波数であり、虚部 ω_i は攪乱の成長率を表す。 ω_i の正負によって攪乱の振幅が時間発展するかどうか決定される。 $\omega_i > 0$ のとき、攪乱が成長し、主流は線形不安定である。 $\omega_i < 0$ ならば線形安定な流れであり、攪乱は減衰する。また、 ω の実部 ω_r は線形攪乱の角振動数を表す。式 (7) を

Navier-Stokes 方程式の速度・圧力成分に加えて線形化するると以下の式を得る。

$$i(\alpha U_z - \omega) v_z + U_z' v_r + i\alpha q = \frac{2}{Re} \left[v_z'' + \frac{1}{r} v_z' - \left(\alpha^2 + \frac{m^2}{r^2} \right) v_z \right] \quad (8)$$

$$i(\alpha U_z - \omega) v_r + q' = \frac{2}{Re} \left[v_r'' + \frac{1}{r} v_r' - \left(\alpha^2 + \frac{m^2 + 1}{r^2} \right) v_r - \frac{2im}{r^2} v_\theta \right] \quad (9)$$

$$i(\alpha U_z - \omega) v_\theta + \frac{im}{r} q = \frac{2}{Re} \left[v_\theta'' + \frac{1}{r} v_\theta' - \left(\alpha^2 + \frac{m^2 + 1}{r^2} \right) v_\theta + \frac{2im}{r^2} v_r \right] \quad (10)$$

$$i\alpha v_z + v_r' + \frac{1}{r} v_r + \frac{im}{r} v_\theta = 0 \quad (11)$$

ここで、プライムは r に関する微分を表す。速度場の攪乱は境界条件 (12) を満たす。

$$v_z = v_r = v_\theta = 0 \quad (r = 1, \quad r \rightarrow \infty) \quad (12)$$

式 (8) - (11) は半径方向 r を独立変数とする攪乱の常微分方程式となり、 ω に対する固有値問題に帰着される。

固有値問題を数値的に解くために、 $\zeta = 2(z/Re)^{1/2}$ 、 $\sigma = (r-1)/\zeta$ の座標変換を導入する。 σ 方向の離散化

には Chebyshev 選点法を使用し、線形攪乱方程式をベクトル行列形式で取り扱う。選点数 N に対し、 σ 方向の点と Chebyshev 点は以下の式の関係がある。

$$x_n = \cos\left(\frac{n\pi}{N}\right) \quad 1 \leq n \leq N \quad (13)$$

$$x = \frac{\sigma - \hat{\sigma}}{\sigma + \hat{\sigma}} \quad \sigma \in [0, \infty] \rightarrow x \in [-1, 1] \quad (14)$$

$\hat{\sigma}$ は σ 方向の Chebyshev 点の分配を決定する実数で、シャフト付近での点の分配の粗密を決定する。本論文では $\hat{\sigma} = 15$ とした。式 (8) - (11) から、圧力項 q を消去し、境界条件 (12) を適用し、 $3N - 6$ 次の正方行列の固有値、固有ベクトルを計算する。固有値計算は MathWorks 社の数値解析ソフトウェア MATLAB の eig 関数を使用した QR 法で行う。本研究では選点数 N を 64 とした。また、周回方向波数 m については Tutty *et al.*⁵⁾ の先行研究の臨界 Re 数から、不安定性を生じる可能性がある $m = 0, 1, 2, 3$ の場合を調べた。事前に、計算コードの検証のために Blasius 境界層の固有値を計算し、6桁の精度を確認した。

4 線形安定性解析結果

線形安定性の解析結果として、局所最大成長率を図 4 に示す。軸方向距離 z を、縦軸は攪乱の成長率 ω_i を表す。また、図中の \square , $+$ はそれぞれ流線形鏝、椎型鏝を装着した場合の計算結果で、 ω_i が最大となる α を探した。 Re 数が増加するにつれて局所成長率は大きくなる。不安定モードの $m = 1$ (黒), 2 (青) では Re 数の増加につれて中立安定点が上流側へ移動していく。 $m = 3$ (緑) のモードは $Re = 2.0 \times 10^4$ (図 4 (f)) でのみ、 $z = 20$ 付近で成長する。その成長率は、 $m = 1, 2$ のモードよりも小さく、 $z = 45$ で再び線形安定となる。また、シャフト中間部を過ぎると $m = 3$ のモードの ω_i は再び増加する。

鏝による局所成長率の違いはどの Re 数でも、シャフト前半部で現れる。上流側ではいずれのモードも、流線形鏝を装着した場合の方が、わずかであるがより不安定となる。流線形鏝では椎型鏝に比べて境界層がより厚くなるためである。境界層の厚さの差が大きい $z \lesssim 60$ (図 2, 3) の範囲では、成長率の違いが見られる。 $m = 2$ のモードは $z \geq 70$ で、 $m = 3$ のモードは $z \geq 30$ で椎型鏝の場合の方が、成長率がわずかに大きくなる。解析したいずれのモードも $z \geq 70$ では鏝による不安定性の違いがほとんど見られなくなる。これは、基本流である境界層流れに対する鏝の影響がほとんど現れないためである。

アーチェリー選手の放つ矢の Re 数 ($1.6 \times 10^4 \leq Re \leq 2.0 \times 10^4$, 図 4 (d) - (f)) では $m = 1, 2, 3$ のモード

が成長する。特に、 $z = 20$ 付近で $m = 2$ のモードが線形増幅し、上流側の線形不安定性に最も寄与する。また、 $Re = 2.0 \times 10^4$ (図 4 (f)) では $m = 3$ のモードが $z = 20$ 付近で線形増幅するが、 $m = 1, 2$ のモードに比べるとその増幅率は小さい。 $m = 1$ のモードは局所成長率が z とともに単調増加しており、解析したどの Re 数でも最下流側で成長するモードである。したがって、今回調査した Re 数全域で矢側面の境界層流れは、非軸対称モードに対して線形不安定な流れである。一方で、 $m = 0$ (赤) の軸対称攪乱は全く成長しない。軸対称モード $m = 0$ は $a \rightarrow \infty$ では 2 次元攪乱に対応する。この事実は平板境界層の線形不安定性において 2 次元 TS 波が主要な役割を果たしていることと対照的である。

図 5 に、流線形鏝の場合における局所最大成長率を与える波数 α_{\max} を示す。線形不安定となる場合の α_{\max} のみを示している。黒実線は $m = 1$ を、青破線は $m = 2$ を表し、それぞれの色の曲線で上から $Re = 2.0, 1.8, \dots, 1.0 \times 10^4$ を表す。 $m = 2$ は $Re = 1.4 \times 10^4$ まで示す。鏝による定性的な違いはないので流線形鏝の結果のみを示す。 α_{\max} は境界層の厚さによって変化する。下流に向かうほど境界層が厚くなるので、 α_{\max} は小さくなる。また、 Re 数が増加すると、 α_{\max} が増加する。これは Re 数の増加につれて、境界層が薄くなるためである。 $m = 1, 2$ のモードを比較すると、 $m = 2$ のモードの α_{\max} が小さくなる。後端での攪乱の波長 $\lambda = 2\pi/\alpha$ は、シャフト半径の 8~30 倍程度となる。 $Re = 2.0 \times 10^4$ の中立安定点での $m = 1, 2$ のモードの波長は、それぞれ半径の 3.6 倍、2.5 倍程度となった。

図 6 に、流線形鏝の場合の $Re = 2.0 \times 10^4$ における、成長率が最大となる $z = 200$ ($m = 1$), 66 ($m = 2$) での固有関数を示す。横軸は半径方向距離 $r-1$ を表し、シャフト表面を 0 としている。図 6 の (a), (b), (c) はそれぞれ z, r, θ 方向の固有関数である。それぞれの図で固有関数の各成分の絶対値を実線で表す。流線形鏝の場合、成長率が最大となる場合の軸方向波数 α は、 $m = 1$ のモードで $\alpha = 0.76$ 、 $m = 2$ のモードでは $\alpha = 1.22$ であった。また、鏝による違いはほとんど見られず、椎型鏝の場合は $m = 1$ では $z = 200$, $\alpha = 0.78$ 、 $m = 2$ では $z = 70$, $\alpha = 1.24$ となった。固有関数の各成分の半径方向の広がりを排除面積¹³⁾ から得られる排除厚さに相当する $\delta(z)$ と比較する。

$$\pi\{1 + \delta(z)\}^2 - \pi = 2\pi \int_1^\infty \{1 - U_z(r)\} r dr \quad (15)$$

式 (15) より $\delta(66) = 0.143$ であり、 $\delta(200) = 0.230$ である。固有関数のピークはシャフト近傍に現れ、不安定モードは境界層内で成長する。モードによる違いはピークの場合に現れる。 $m = 1$ のモードに比べて、 $m = 2$

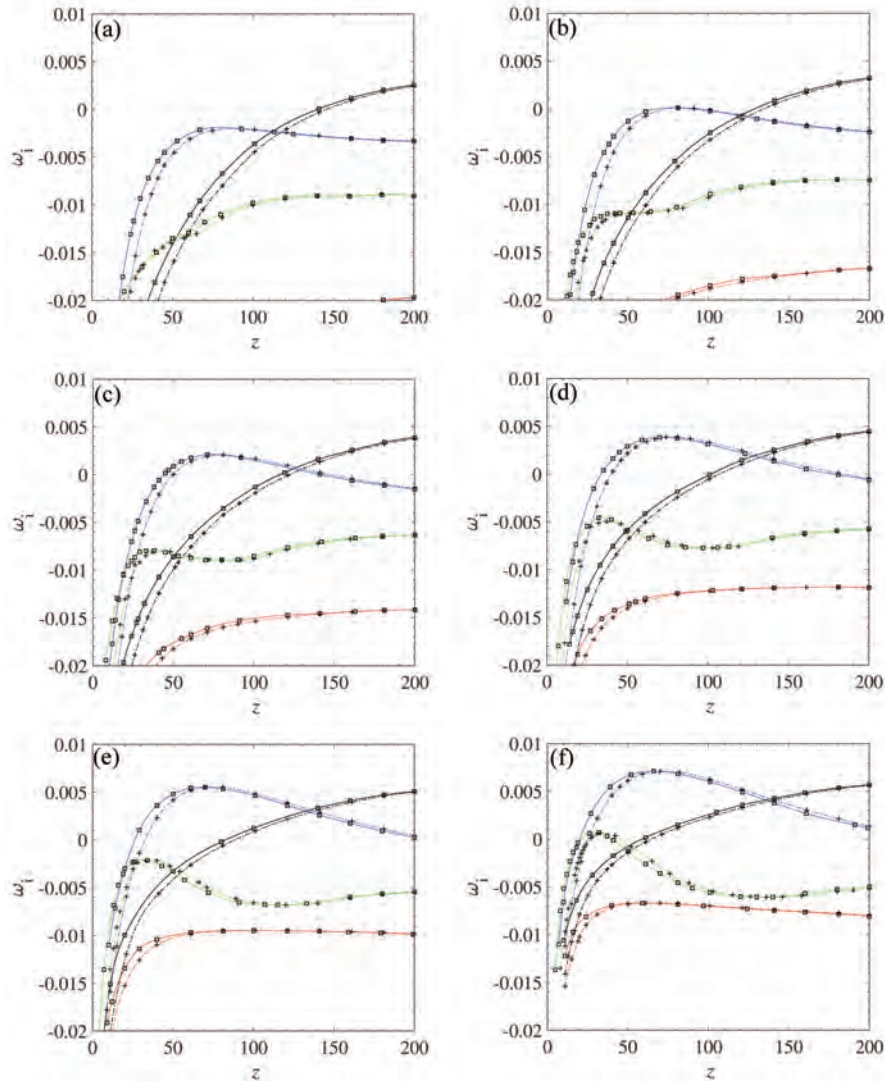


図4 局所最大成長率. 実線, □: 流れ線, 鎖線, +: 椎型鏃. 上から ($z = 200$) $m = 1, 2, 3, 0$ のモードの成長率を表す. (a) : $Re = 1.0 \times 10^4$, (b) : $Re = 1.2 \times 10^4$, (c) : $Re = 1.4 \times 10^4$, (d) : $Re = 1.6 \times 10^4$, (e) : $Re = 1.8 \times 10^4$, (f) : $Re = 2.0 \times 10^4$.

のモードの固有関数はさらに表面付近に集中している.

5 実験結果との比較と議論

線形安定性解析結果 (図4) を, 我々のグループの実験結果 (Miyazaki *et al.*^{3,4}) と比較する. 図7に, 椎型鏃を装着した A/C/E 矢の C_D - Re 数依存性を示す. 図7中の●はベアシャフトで迎角0度の場合の風洞実験結果である. この C_D 値は, 理論計算^{14,15})の結果に重なる層流値を示した. ◆は矢羽をつけた場合の風洞実験結果で, C_D 値は矢羽に働く抗力分だけ増加したことを示す. 迎角を0度にした場合, Re 数増加に伴い C_D 値が滑らかに減少していることから層流状態を示す. +は迎角を0.75度付けた場合で, $Re = 1.0 \times 10^4$ から C_D 値が跳ね上がる. これは $Re = 1.0 \times 10^4$ を超えたところ

で境界層が乱流遷移し, 抗力が増加したことを示す. ◇は国立スポーツ科学センター (JISS) での圧縮空気による飛翔実験結果である. $Re = 1.0 \times 10^4$ に設定して矢を飛ばした場合は迎角によらず C_D 値は層流を示した. $1.3 \times 10^4 \leq Re \leq 1.8 \times 10^4$ の範囲では C_D 値の平均は層流値と乱流値の間をとり, 標準偏差は大きくなった. この Re 数領域では C_D の層流値と乱流値は混在し, 迎角のばらつきによるものであると考えられている. 一方, $Re = 1.7 \times 10^4$ に設定し, 打ち出しに使用するノズルの先端を10度カットして迎角を制御した場合 (☆), C_D 値は層流値をとる結果が得られている. ×は競技者が放った矢の解析結果であり, C_D 値は乱流値を示している. これは矢の迎角が大きいこと, および弓から放られた際の矢のたわみ振動が乱流遷移を誘発するためで

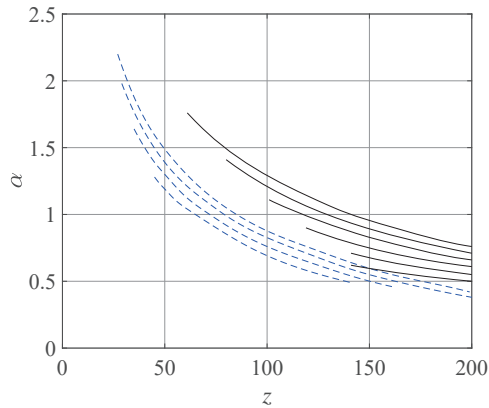


図5 流線形鏃の場合の局所最大成長率を与える軸方向波数 α_{\max} . 実線は $m=1$ を、破線は $m=2$ を表す. 上から $Re = 2.0, 1.8, 1.6, \dots, 1.0 \times 10^4$ ($m=2$ は 1.4×10^4 まで) を示す.

ある. 競技者の放つ矢の C_D 値のばらつきは非常に小さく, 完全に乱流遷移していることを示唆している.

図8に, 流線形鏃を装着したA/C/E矢の C_D - Re 数依存性を示す. MSBS 風洞実験結果については, 椎型鏃の場合の結果と一致した. 一方, 飛翔実験結果 (Δ) は, 椎型鏃の場合との差が見られた. $Re = 9.0 \times 10^3$ で矢を飛ばした場合は, C_D 値は層流値を示した. $1.3 \times 10^4 \leq Re \leq 2.0 \times 10^4$ では C_D の平均値は層流値と乱流値の間をとり, 標準偏差が大きくなる. この遷移領域は椎型鏃の場合に比べてより高 Re 数領域に広がるのがわかる. $Re = 2.4 \times 10^4$ の椎型鏃の場合は C_D 値の平均は乱流値 ($C_D = 2.6 \pm 0.03$) をとり, 標準偏差が小さくなっていることから, 境界層は完全に乱流状態である. 一方, 流線形鏃の場合 ($C_D = 2.2 \pm 0.4$) は標準偏差が椎型鏃の場合と比べて大きい. このことから $Re = 2.4 \times 10^4$ でも乱流遷移が完結していないと考えられる.

以上より, 迎角が非常に小さい場合は鏃の形状によらず, 飛翔実験においても層流境界層が実現する. 線形安定解析結果によれば $m=1, 2$ ($Re = 2.0 \times 10^4$ では $m=3$ も) のモードが成長するはずであるが乱流遷移をもたらすことはないと言える.

線形不安定性領域が存在するにも関わらず, 層流を観測した要因として次の2点が考えられる. (i) 線形攪乱の成長率が小さいこと, (ii) 使用したMSBS風洞の乱流強度が小さく (0.05%), 境界層への攪乱の導入が弱かったこと, である. まず, 群速度 $c_g = d\omega_r/d\alpha$ を計算し, 線形攪乱の波束の振る舞いを考察する. 図5に示す波数 α の攪乱の波束は速度 c_g で伝搬する. 図9に, 流線形鏃の矢の場合について, 線形成長する攪乱モード

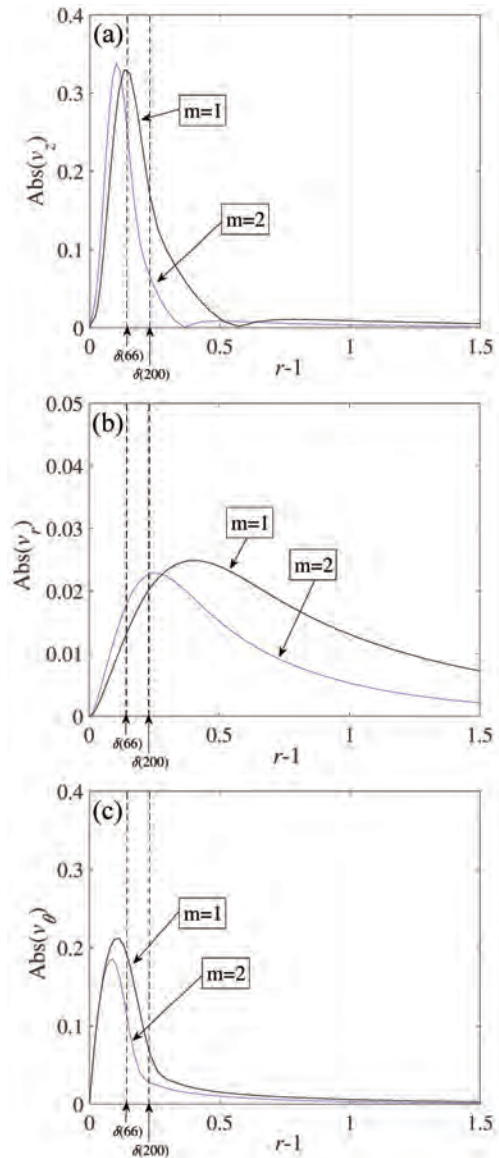


図6 $Re = 2.0 \times 10^4$ の ω_i が最大となるときの固有関数. $m=1: z=200, \alpha=0.76$, $m=2: z=66, \alpha=1.22$.

ごとに c_g を示す. 群速度は一樣流速の0.3~0.4倍程度で Re 数が大きくなるほど小さくなり, 攪乱の滞留時間が長くなる. $m=1$ のモードの群速度は下流に向かうほど小さくなるが, 負にならない. これはすべての攪乱波束が下流に向かって流れることを示す. 特に中立安定点でも, 攪乱が上流の安定領域に遡ることはない. したがって, 攪乱は二次不安定¹⁶⁾を起し乱流遷移をもたらす前に下流に流される可能性が高い.

次に e^N 法に基づいて乱流遷移の可能性をより定量的に検討する. e^N 法は境界層の乱流遷移を線形安定性解析によって予測する半経験的な手法である¹⁷⁾. 攪乱の時間増幅率から Gaster 変換¹⁸⁾により空間発展を評価する. ここでは式(16)を使用して線形安定性解析結果か

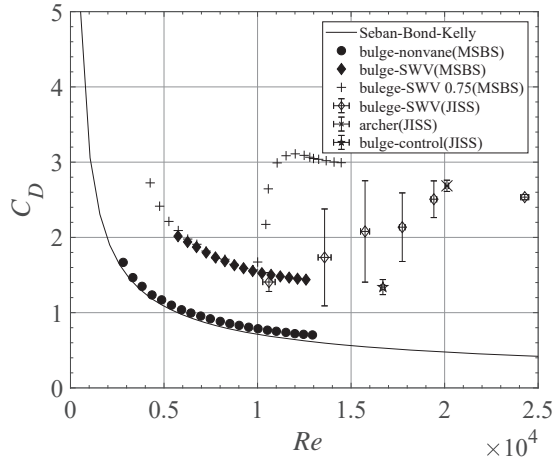


図7 椎型鏃を装着した A/C/E 矢の C_D - Re 数依存性. Miyazaki *et al.*⁴⁾ Fig. 8 より再構成.

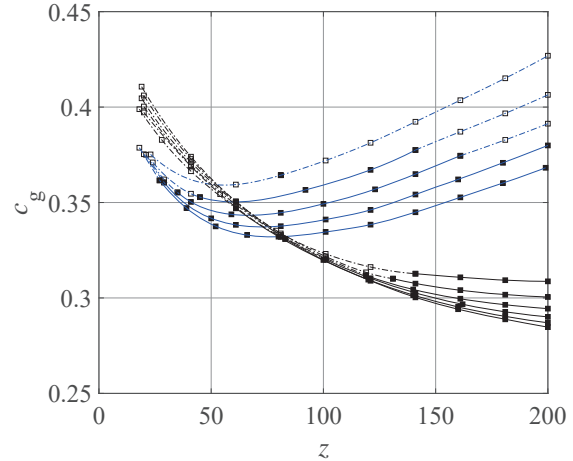


図9 流線形鏃の場合の局所群速度 c_g . 右上がりの曲線群は $m = 2$ を表し, 上から $Re = 1.2, 1.4, \dots, 2.0 \times 10^4$, 右下がりの曲線群は $m = 1$ を表し, 上から $Re = 1.0, 1.2, \dots, 2.0 \times 10^4$ を表す. 線形不安定な箇所は黒塗りです.

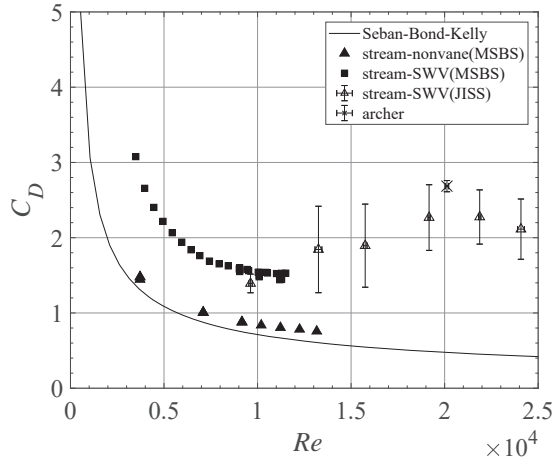


図8 流線形鏃を装着した A/C/E 矢の C_D - Re 数依存性. Miyazaki *et al.*³⁾ Fig. 6, 9 より再構成.

ら包絡的な N 値を計算する.

$$N = \int_{z_{\min}}^{z_{\max}} \frac{\omega_i(z)}{c_g(z)} dz \quad (16)$$

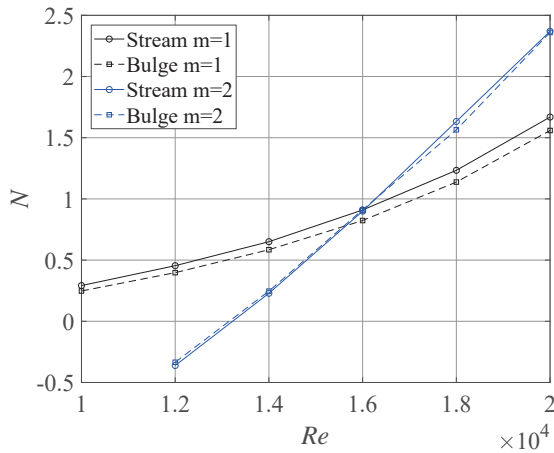
局所成長率と群速度をスプライン補間により関数近似し, 不安定性の現れる範囲で式 (16) を数値積分し, N 値を計算する. 図 10 に, 2つの鏃に対して, モードごとに計算した N 値の Re 数依存性を示す. $Re < 1.6 \times 10^4$ では $m = 1$ のモードの N 値が大きくなり, $Re > 1.6 \times 10^4$ では $m = 2$ のモードが N 値が大きくなる. $Re = 1.0 \times 10^4$ における, $m = 2$ のモードは成長しないので計算をしていない. 椎型鏃の場合よりも流線形鏃の場合の N 値が大きいののは上流側の線形不安定性の成長率がわずかながら大きいことによる.

N 値と乱流強度から MSBS 風洞実験における乱流遷移の可能性を評価する. 平板境界層の場合について, Mack¹⁹⁾ により乱流遷移に至る N 値の評価式 (17) が与えられている.

$$N = -2.4 \ln(Tu) - 8.43 \quad (17)$$

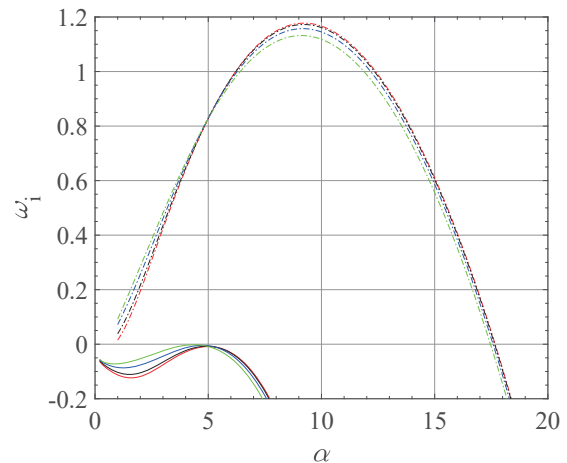
式 (17) の一様流中の残留乱れ Tu への依存性は, 2次元 TS 波の線形成長を経由した乱流遷移に対するものである. 円筒面に対する同様の評価式が見いだせないので, 本研究では, 参考として式 (17) を使用して遷移の可能性を評価する. MSBS 風洞の乱流強度は 0.05 % であるから $Tu = 5.0 \times 10^{-4}$ となり, 遷移位置の N 値を計算すると $N = 9.81$ となる. 図 10 に示される N 値はいずれもこの値を下回る. さらに, Vinod and Govindarajan²⁰⁾ は $m = 1, 2, 3$ の不安定モードが有限振幅 (主流の 2 %) に成長した状態の二次不安定性を調べた. 彼らは円柱側面に発達する境界層は, 平板境界層よりも不安定化しにくいことを示している. したがって, 本研究での N 値は乱流遷移をもたらす程大きくないと判断される. MSBS 風洞実験で迎角を 0 度に設定した場合や, 飛翔実験において迎角を制御して矢を発射した場合に C_D が層流値となったことは, 攪乱が乱流遷移をもたらす程成長しなかったためと考えられる.

その一方で, 気流に対してわずかに迎角のついた矢の側面における境界層流れは乱流化することが, MSBS 風洞実験と飛翔実験から分かる. 図 7 と図 8 を比べると, 流線形鏃を装着した場合の遷移領域は椎型鏃を装着

図10 N 値- Re 数依存性.

した場合よりも高 Re 数領域に広がっている. 図10に示す N 値は流線形鏃を装着した場合の方が少し大きいので, この飛翔実験結果を説明することはできない. 鏃形状の基本流への影響は原点(鏃の付け根)付近で顕著なので, 矢先端 ($z=1, 2$) における境界層流れの不安定性も調べる必要がある. ただし, 椎型鏃の場合の基本流は剥離を伴うため平行流近似が適用できず, 定量的に信頼できる結果を与えるためには biglobal²¹⁾ 安定性解析を行う必要がある. ここでは, 平行流近似に基づいて線形不安定性を調べ, 定性的な目安とする. 図11に $z=1$ における解析結果を示す. 実線は流線形鏃の場合, 鎖線は椎型鏃の場合の成長率の α 依存性を表し, 不安定性は椎型鏃の場合のみ現れる. 椎型鏃の場合の成長率のピークは上から $m=0$ (赤), 1 (黒), 2 (青), 3 (緑) のモードであり, 流線形鏃の場合は上から $m=3, 2, 1, 0$ のモードである. 椎型鏃の場合の不安定性成長率は $O(1)$ であり, N 値への寄与も 4.6 程度に達する. その他のモードの不安定性成長率も同程度の値となる. 流線形鏃の場合には, 原点付近でも線形安定である. この先端付近における安定性特性の差が, 鏃形状による乱流遷移領域の差につながっているようである. 飛翔実験で得られた C_D 値はどちらの鏃の場合でも層流値と乱流値に二値化していることから, 気流に対するわずかな迎角が剥離に影響を与えたり境界層内にストリーク構造を誘起して, シャフト下流部における線形不安定性を経由しない乱流遷移をもたらす可能性もある. 迎角がついた場合, 主に $m=1$ のモードの攪乱が矢の先端から導入されるはずである. この攪乱は線形過程では, 矢の後方でのみ成長する. しかし, 飛翔実験で C_D 値が二値化することは, 矢の先端から乱流遷移が引き起こされていることを意味する. bypass 遷移²²⁾ のように線形不安定性を経ない遷移の可能性も含めて, より詳細

な乱流遷移の過程の解明が求められる.

図11 鏃の継ぎ目付近 ($z=1$) での攪乱の成長率 $\omega_i - \alpha$ 依存性. $Re = 2.0 \times 10^4$. 実線: 流線形鏃, 鎖線: 椎型鏃.

6 結言

2種類の鏃をつけた非回転アーチェリー矢の軸対称流を計算し, 平行流近似に基づく線形安定性解析を実際のアーチェリー競技で取りうる Re 数領域で行った. $1.0 \times 10^4 \leq Re \leq 2.0 \times 10^4$ の範囲では $m=1$ のモードの線形不安定性が現れ, $1.2 \times 10^4 \leq Re \leq 2.0 \times 10^4$ の範囲で $m=2$ のモードの線形不安定性が現れた. $m=3$ のモードの不安定性は $Re = 2.0 \times 10^4$ で現れた. $m=0$ のモードの不安定性は, 解析した Re 数の範囲では現れなかった. 境界層や線形安定性の鏃による違いは $z \approx 60$ 程度の箇所まで現れ, わずかであるが流線形鏃を装着した場合の方が不安定性は強くなった. 包絡的に N 値を計算した結果, 攪乱は乱流遷移をもたらすほど成長しないことが示された. このことは迎角が0度の場合のMSBS風洞実験や, 選手領域の Re 数での飛翔実験で迎角を制御した場合に層流を観測したことと整合する. その一方で, 矢側面の境界層流れの乱流遷移は線形不安定性を経由しない bypass 遷移²²⁾ である可能性がある. 椎型鏃の継ぎ目近傍では剥離泡による強い線形不安定性が現れた. この領域での平行流近似に基づく解析は不適切であり, biglobal²¹⁾ な線形不安定性解析を行うことが必要である. 矢羽による回転の影響を考慮した詳細な安定性解析を行い, 迎角がついた矢側面の境界層流れの乱流遷移過程を解明しなければならない.

謝辞

実験データの整理に関して, 電気通信大学の安藤, 芹野両君に協力をいただき, ここに感謝します. 本研究は

科学研究費補助金基盤研究 (C) (一般) 18K03943 (2018 ~ 2020 年度) の支援の下に行われたものである。

引用文献

- 1) Park, J. L., Hodge, M. R., Al-Mulla, S., Sherry, M., and Sheridan, J.: Air flow around the point of an arrow, *J. Sports Engineering and Technology*, 227 (2013) 64–69.
- 2) 鈴木一史, 榊井和典, 向山桂太, 宮崎武, 澤田秀夫: 矢の空力特性- 境界層遷移に対する先端形状の影響-, *ながれ*, 29 (2010) 287–296.
- 3) Miyazaki, T., Mukaiyama, K., Komori, Y., Okawa, K., and Taguchi, S.: Aerodynamic properties of an archery arrow, *Sports Engineering*, 16 (2013) 43–54.
- 4) Miyazaki, T., Matsumoto, T., Ando, R., Ortiz, J., and Sugiura, H.: Indeterminacy of drag exerted on an arrow in free flight: arrow attitude and laminar-turbulent transition, *Eur. J. Phys.*, 38:064001 (2017).
- 5) Tutty, O. R., Price, W. G., and Parsons, A. T.: Boundary layer flow on a long thin cylinder, *Phys. Fluids*, 14 (2002) 628–637.
- 6) Muralidhar, S. D., Pier, B., and Scott, J. F.: Instability of flow around a rotating, semi-infinite cylinder, *Phys. Rev. Fluids*, 1:053602 (2016).
- 7) Muralidhar, S. D., Pier, B., Scott, J. F., and Govindarajan, R.: Flow around a rotating, semi-infinite cylinder in an axial stream, *Proc. R. Soc. London A*, 472:20150850 (2016).
- 8) Herrada, M. A., Pino, C. D., and Fernandez-Feria, R.: Stability of the boundary layer flow on a long thin rotating cylinder, *Phys. Fluids*, 20:034105 (2008).
- 9) Iwatsu, R.: Application of fourth-order explicit schemes to the computation of axisymmetric swirling flows of Boussinesq fluid in containers with arbitrary cross sections, *Num. Heat Trans. B*, 56 (2009) 191–210.
- 10) Carpenter, M.K. and Kennedy, C.A.: Fourth-order 2N-storage Runge-Kutta schemes, *NASA TM*, 053602 (1994).
- 11) Eiseman, P. R.: Mesh generation using algebraic techniques, *NASA CP*, 2166 (1980) *Numerical Grid Generation Techniques*, 73–120.
- 12) Vinokur, M.: On one-dimensional stretching functions for finite-difference calculations, *J. Comput. Phys.*, 50 (1983) 215–234.
- 13) Tutty, O. R.: Flow along a long thin cylinder, *J. Fluid Mech.*, 602 (2008) 1–37.
- 14) Seban, R. and A., Bond, R.: Skin-friction and heat-transfer characteristics of a laminar boundary layer on a cylinder in axial compressible flow, *J. Aerosp. Sci.*, 18 (1951) 671–675.
- 15) Kelly, H. R.: A note on the laminar boundary layer on a cylinder in axial compressible flow, *J. Aerosp. Sci.*, 21 (1954) 634–637.
- 16) Herbert, T.: Secondary Instability of Boundary Layers, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, 20 (1988) 487–526.
- 17) 徳川直子, 高木正平, 上田良穂, 井門敦志: 矩形翼境界層の自然遷移に対する外乱の影響, *ながれ*, 24 (2005) 629–639.
- 18) Gaster, M.: A note on the relation between temporally-increasing and spatially-increasing disturbances in hydrodynamic stability, *J. Fluid Mech.*, 14 (1962) 222–224.
- 19) Mack, L. M.: Transition Prediction and Linear Stability Theory, *AGARD Conf. Proc.*, 224 (1977) 1-1-1-22.
- 20) Vinod, N. and Govindarajan, R.: Secondary instability in incompressible axisymmetric boundary layers: Effect of transverse curvature, *J. Fluids Engineering, Transactions of the ASME*, 134:024503 (2012).
- 21) Theofilis, V.: Advances in global linear instability analysis of nonparallel and three-dimensional flows, *Prog. Aerosp. Sci.*, 39 (2003) 249–315.
- 22) Schmid, P. J. and Henningson D. S.: *Stability and Transition in Shear Flows*, Applied Mathematical Sciences No. 142 (Springer, 2001) 402.