

〔研究ノート〕

容器の縁から盛り上がる水面の高さ に関する実験と解析

*防衛大学校 名誉教授

五十嵐 保†

コップに水を注ぐとその縁を越えて水面は盛り上がる。この現象はよく知られていて、理科教育や教養書でも表面張力の説明に使われている。しかし、その水面の高さ求めた報告例はない。この盛り上がった水面は限界水量を超えたとき、溢れ出る。この直前と直後の状態をフェーズ A, B とする。容器の直径 30~90 mm の縁が丸みのある場合と平らな場合の水面高さを測定した。容器直径の影響は少なく、縁が丸みのある場合のフェーズ A, B の水面の高さは、4 mm および 3 mm 前後である。縁が平らな場合のフェーズ A, B の水面の高さは 5 mm および 4 mm 前後である。次元解析から水面高さの実験式を求めた。次に、観察により水面の曲率半径を求め、ヤング・ラプラスの式を用いて解析を行った。解析結果は実験値とよく一致した。

Experiments and Analysis on the Level of the Water over the Brim of a Vessel

Tamotsu IGARASHI, Professor Emeritus, National Defense Academy

(Received 30 January, 2014; in revised form 25 February, 2014)

Fill water into the glass, the level of the water is over the brim of glass. This phenomenon is well known, and is an elementary knowledge for the surface tension referred to in science textbook and educational book. Nevertheless, we know nothing about the level of the water. The process of the downfall of the water, which is appeared after the volume of water reach the maximum, was observed closely. The level of the water for two faces A and B after and before the downfall were measured for the diameter of the vessel more than 30 mm. In the case of the flat brim, the heights of the water for the faces A and B are about 5 mm and 4 mm, respectively, regardless of the diameter of the vessel. In the case of the rounded brim, the heights of the water for the faces A and B are about 4 mm and 3 mm, respectively. Empirical equations are obtained by dimensional analysis of these experimental results. Next, the analysis was conducted using Young-Laplace Equation on the basis of the assumption of the radii of the curvature of the surface of the water from the observation. The analysis agrees well with the experimental values.

(KEY WORDS): Surface Tension, Hydrostatics, Dimensional Analysis, Young-Laplace Equation, Bond Number

1 まえがき

容器に水を注ぐと容器の縁を越えて水面は盛り上がる。この現象はよく知られていて、理科教育や教養書^{(1), (2)}でも表面張力の説明に使われている。また、器材も不要で簡単に実験できることから、“水に浮く一円玉”^{(1), (3), (4)}とともに表面張力のデモンストレーション用の体験学習の教材⁽⁵⁾でもある。コップの水面高さは 2 mm 以上としている。最近、著者⁽⁶⁾は表面張力に浮力が絡んだ問題として“水に浮く比重 1 以上の円盤”を報告した。

この“盛り上がる水”は、その水面の上昇を表面張力によるとして、定性的説明にとどまっている。また、詳細な実験や解析の報告例はない。

縁に丸みのあるコップと縁が平らな容器に水を目いっぱい注いだ場合の写真を図 1 に示す。盛り上がった水面高さはそれぞれ 4 mm 弱と 5 mm である。



図 1 容器の縁から盛り上がる水

*〒236-0046 横浜市金沢区釜利谷西 3-56-15

† E-mail: tamoigarashi@yahoo.co.jp

縁が丸い場合は、盛り上がった部分の水は容器の縁の外側にはみ出すことはない。限界高さ近くで水を注意深く注ぐと、容器の縁が不安定にゆれ、やがて崩落する。一方、縁が平らな容器の場合は、盛り上がった水は容器の縁の外側にはみ出ている。さらに、1滴の水を注ぐと、一瞬で崩落が起こる。

容器の縁から盛り上がる水の現象解明を目的として研究を行った。盛り上がった水面の崩落直前と直後の状態をフェーズ A, B として、それぞれの水面高さ h_A および h_B を測定した。さらに、次元解析を行い、水面高さを与える無次元量の実験式を得た。次に、観察にもとづいた水面の水平方向および鉛直方向の主曲率半径を与え、ヤング・ラプラスの式に適用して解析を行った。水面高さの解析結果は実験値と一致し、実験式とも一致した。

記号

- d : 容器の直径
 g : 重力
 h : 盛り上がった水面の高さ
 P_a, P_{liq} : 大気圧, 水圧
 R_x : 水平方向の主曲率半径
 R_z : 鉛直方向の主曲率半径
 t : 容器の縁の肉厚
 Δp : 気相と液相の圧力差 $= P_{liq} - P_a$
 θ : 接触角
 ρ, ρ_a : 水の密度, 空気の密度
 σ : 水の表面張力
- 添え字
A, B : フェーズ A, B

2 実験

2.1 供試容器と測定方法

実験に用いた容器はコップ、食器の他、食料品の容器や調味料のキャップ、ペットボトルのキャップ等である。容器の直径(外径)は $d = 30 \sim 90 \text{ mm}$ の範囲で、縁の形状は丸みのあるものと平らなものに大別される。水はスポイトやストローを用いて注いだ。水面の高さの測定は前報⁽⁵⁾で円盤の沈下深さを測定したハイトゲージを用いた。

2.2 現象の観察

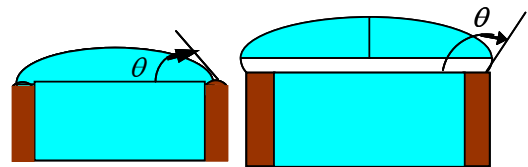
盛り上がった水がオーバーフローするまでの様子を図 2 (a)~(c)に示す。初め、水は容器の内壁の縁を起点として盛り上がる(a)。起点は縁の上から容器の外縁に移動する。水を加え続けると、水のレンズ効果により縁の上に透明なラインが表れ、この透明な層は次第に幅を広げ、縁の外側にはみ出て、やがて限界に達する(b)。さらに、水を滴下する



(a) (b) (c)
図 2 水面の形状変化：縁が平らな場合

と、盛り上がった水面は一気に崩落する(c)。

フェーズ A において、容器の縁と水との接触角 θ は図 3 に示すように、丸みのある縁では $\theta \leq 90^\circ$ では浸漬ぬれ、平らな縁では $\theta > 90^\circ$ で付着ぬれである。



(a) 丸みの縁：浸漬ぬれ (b) 平らな縁：付着ぬれ

図 3 縁の形状による接触角の違い

水面の高さ h_A, h_B と容器の縁近傍の鉛直方向の主曲率半径 R_z の関係を可視化写真から予測した。縁が丸い場合を図 4 (a), (b)に、縁が平らな場合を図 5 (a), (b)に示す。容器中央部の \uparrow は水面高さ h 、縁の円形は主曲率半径の 2 倍の $2R_z$ を表している。

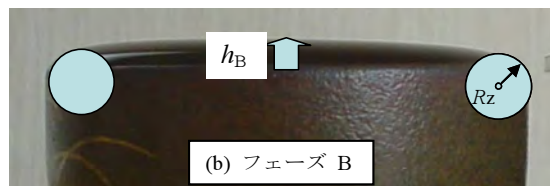
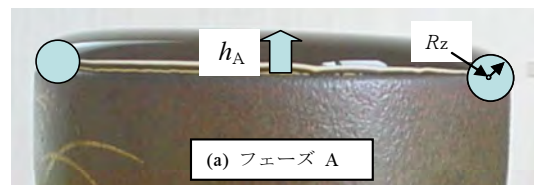


図 4 縁が丸い場合の鉛直方向の主曲率半径

縁が丸い場合は、次の関係が得られる。

$$\text{フェーズ A} : R_z = h_A/2 \quad (1-a)$$

$$\text{フェーズ B} : R_z = h_B \quad (1-b)$$

縁が平らな場合は、次の関係が得られる。

$$\text{フェーズ A} : R_z = h_A/3 \quad (2-a)$$

$$\text{フェーズ B} : R_z = h_B/2 \quad (2-b)$$

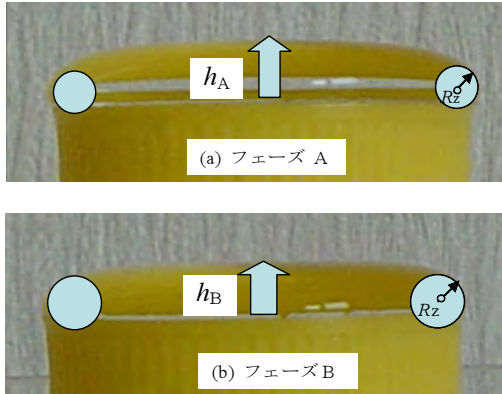


図5 縁が平らな場合の鉛直方向の主曲率半径

2.3 実験結果

2.3.1 丸みのある縁の場合の水面高さ

直径 $d = 35 \sim 86.6$ mm の容器に対するフェーズ A, B に対する盛り上がった水面高さ h_A, h_B は直径 d に依らずほぼ一定で、フェーズ A では $h_A = 4$ mm 前後、フェーズ B では $h_B = 3$ mm 弱である。

2.3.2 平らな縁の場合の水面高さ

直径 $d = 30.8 \sim 89.0$ mm の容器に対するフェーズ A, B の盛り上がった水面高さ h_A, h_B も直径 d の影響はなく、フェーズ A では $h_A = 5$ mm 前後、フェーズ B では $h_B = 4$ mm 前後である。

なお、容器直径と水面高さの関係、 $h - d$ の関係は、後述の図 8 (b) および図 9 (b) を参照されたい。また、容器の肉厚の影響は見られなかった。

2.4 無次元水面高さの次元解析

直径 d の容器の盛り上がる水面の高さ h がどのような関数で表されるのかを次元解析から求める。

この現象に関係する物理量は容器の直径 d 、水の表面張力 σ 、密度 ρ 、重力加速度 g である。

- 関係する物理量の記号と次元
水面高さ： h [L]、容器の直径： d [L]、
水の表面張力： σ [MT⁻²]、水の密度： ρ [ML⁻³]、
重力加速度： g [L t⁻²]
- 指数法

$$h^{\pi_1} d^{\pi_2} \sigma^{\pi_3} \rho^{\pi_4} g^{\pi_5} \quad (3)$$

$$M \text{ の指数：} \pi_3 + \pi_4 = 0,$$

$$L \text{ の指数：} \pi_1 + \pi_2 - 3\pi_4 + \pi_5 = 0$$

$$t \text{ の指数：} \pi_3 + \pi_5 = 0 \quad (4)$$

未知数 5 個に対し方程式 3 個である。したがって 2 個の指数 π_1, π_3 によって他の指数が表される。

$$\pi_2 = -\pi_1 - 2\pi_3, \quad \pi_4 = \pi_5 = -\pi_3 \quad (5)$$

これを式(3)に代入、整理して次式を得る。

$$\left(\frac{h}{d}\right)^{\pi_1} \left(\frac{\sigma}{\rho g d^2}\right)^{\pi_3} \quad (6)$$

ここで π_1, π_3 の数値は任意でよいから括弧内は無次元、かつ互いに独立である。第 1 項は無次元水面高さ、第 2 項の $\sigma/\rho g d^2$ も無次元で、この逆数はボンド数、 $B_o = \rho g d^2/\sigma$ である。分子、分母に d を掛けて $\rho g d^3/\sigma d$ とすれば、ボンド数は重力と表面張力との比となる。水面の限界高さは次の形で表わせる。

$$\frac{h}{d} = f\left(\frac{\sigma}{\rho g d^2}\right) = f(1/B_o) = C_h \left(\frac{\sigma}{\rho g d^2}\right)^m \quad (7)$$

実測値を式(7)の無次元量の関係で整理した結果を式(8)~式(11)と共に図 6, 図 7 に示す。式(7)の指数 m の値は 0.5 である。水面高さ h は直径 d に依らず、表面張力 σ 、密度 ρ によって決まる。

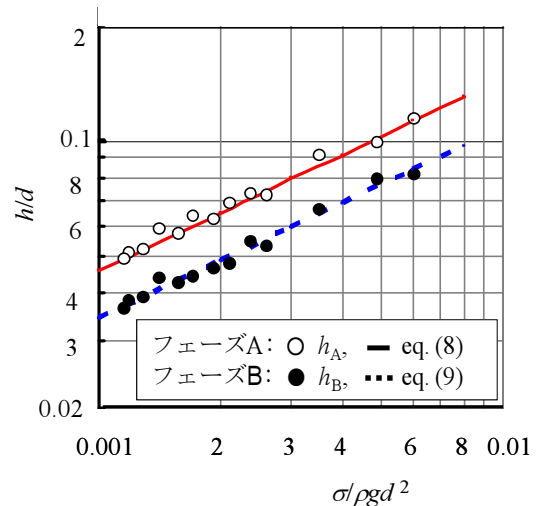


図6 水面の高さの無次元表示
：縁が丸い場合

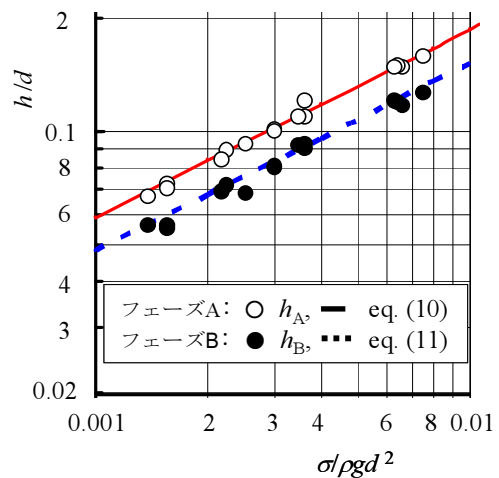


図7 水面の高さの無次元表示
：縁が平らな場合

縁が丸い場合のフェーズ A, B の水面の無次元表示式は次式で与えられる. 誤差は±5%以内である.

$$h_A/d = 1.45\sqrt{\sigma/\rho g d^2} \tag{8}$$

$$h_B/d = 1.08\sqrt{\sigma/\rho g d^2} \tag{9}$$

縁が平らな場合のフェーズ A, B の水面の無次元表示式は次式で与えられる. 誤差は±5%以内である.

$$h_A/d = 1.83\sqrt{\sigma/\rho g d^2} \tag{10}$$

$$h_B/d = 1.51\sqrt{\sigma/\rho g d^2} \tag{11}$$

3 解析

3.1 丸みのある縁の場合

鉛直方向の主曲率半径 R_z は前述の式(1-a), (1-b)に記したように, フェーズ A ではほぼ $h_A/2$ に等しく, フェーズ B ではほぼ h_B に等しい. 一方, 水平方向の曲率半径 R_x は $d/2$ である.

容器の縁における圧力差と表面張力の関係をヤング・ラプラスの式 (Young-Laplace Equation) に適用して, 簡単な解析を行う.

$$\Delta P = \sigma \left(\frac{1}{R_x} + \frac{1}{R_z} \right) = \rho g h \tag{12}$$

ΔP は液相と気相の圧力差で ($P_{\text{liquid}} - P_{\text{air}}$), である.

フェーズ A の場合は, 式(12)は次式となる.

$$\rho g h_A = \sigma \left(\frac{1}{d/2} + \frac{1}{h_A/2} \right) \tag{13}$$

式(13)を変形し, h_A に関する 2 次方程式を得る.

$$h_A^2 - 2 \left(\frac{\sigma}{\rho g d} \right) h_A - 2 \left(\frac{\sigma}{\rho g} \right) = 0$$

上式を解いて, 次の解を得る.

$$h_A = \frac{\sigma}{\rho g d} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho g} \right) \left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} + 2 \right)} \tag{14}$$

上式の両辺を d で除して無次元化する.

$$\frac{h_A}{d} = \frac{\sigma}{\rho g d^2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} \right) \left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} + 2 \right)} \tag{15}$$

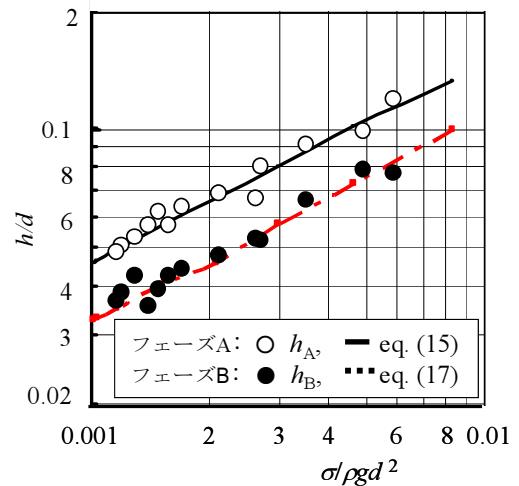
フェーズ B の場合は, 主曲率半径は $R_z = h_B$ であるから式(12)は次式となる.

$$\rho g h_B = \sigma \left(\frac{1}{d/2} + \frac{1}{h_B} \right) \tag{16}$$

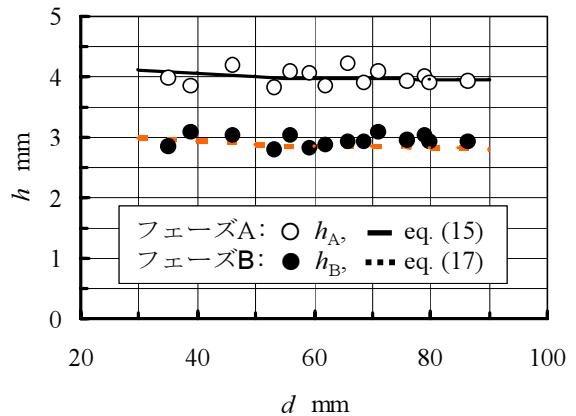
同様に, 上式の解は次式で与えられる.

$$\frac{h_B}{d} = \frac{\sigma}{\rho g d^2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} \right) \left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} + 1 \right)} \tag{17}$$

フェーズ A, B の容器の直径 d ($= 30 \sim 90$ mm) に対する解, 式(15)および式(17)と実測値との比較を無次元表示の $\sigma/\rho g d^2 - h/d$ の関係および $d - h$ の関係を図 8 (a), (b)に示す. 式(15), (17)は無次元量, $\sigma/\rho g d^2$ の複雑な関数であるが, 結果的には, 簡潔な実験式(8), (9)とよく一致している.



(a) $\sigma/\rho g d^2 - h/d$ の関係



(b) $d - h$ の関係

図 8 丸みのある縁の水面の高さの解析結果と実測値の比較

3.2 平らな縁の場合

縁の上側の水面の鉛直方向の主曲率半径 R_z は, フェーズ A ではほぼ $h_A/3$ に等しく, フェーズ B ではほぼ $h_B/2$ に等しい.

フェーズ A の場合は次式となる.

$$\rho gh_A = \sigma \left(\frac{1}{d/2} + \frac{1}{h_A/3} \right) \quad (18)$$

上式を解いて、最終的に次式を得る.

$$\frac{h_A}{d} = \frac{\sigma}{\rho g d^2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} \right) \left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} + 3 \right)} \quad (19)$$

フェーズ B の場合は次式となる.

$$\rho gh_B = \sigma \left(\frac{1}{d/2} + \frac{1}{h_B/2} \right) \quad (20)$$

上式を解いて、式(15)と同形の次式を得る.

$$\frac{h_B}{d} = \frac{\sigma}{\rho g d^2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} \right) \left(\frac{\sigma}{\rho g d^2} + 2 \right)} \quad (21)$$

平らな縁の容器のフェーズ A, B の解析解, 式(19)および式(21)と実測値との比較を図9 (a), (b)に示す. 両解析結果は実測値とよく一致している.

4. 結論

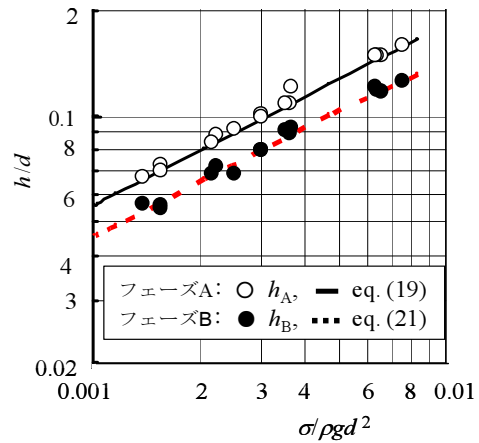
容器に水を注ぐと縁を越えて水面が盛り上がる現象の観察と実験および簡単な解析を容器直径 $d = 30 \sim 90 \text{ mm}$ の範囲で行った. 得られた主要結果は次の通りである.

(1) 容器の縁と水との接触角 θ について, 平らな縁では水面が崩壊前のフェーズ A は, $\theta \geq 90^\circ$ の付着ぬれ, 崩壊後のフェーズ B は $\theta < 90^\circ$ の浸漬ぬれである. 一方, 丸みのある縁ではフェーズ A, B とも $\theta < 90^\circ$ の浸漬ぬれである.

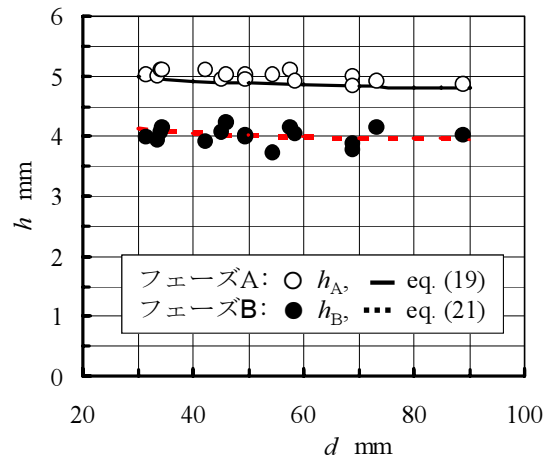
(2) 丸みのある縁の場合, フェーズ A, B の水面高さ h_A, h_B は, それぞれ $4 \text{ mm}, 3 \text{ mm}$ 前後である. 平らな縁の場合, フェーズ A, B の水面高さ h_A, h_B は, それぞれ $5 \text{ mm}, 4 \text{ mm}$ 前後である.

(3) 次元解析により水面高さ h/d を無次元数 $\sigma/\rho g d^2$ で定式化した. 丸みのある縁のフェーズ A, B の水面高さは式(6), (7)で, 平らな縁のフェーズ A, B の水面高さは式(8), (9)で表示される.

(4) フェーズ A, B に対する容器の縁における盛り上がった水面の鉛直方向の主曲率半径 R_A, R_B を写真から読み取り, 水面の高さ h_A, h_B に比例するとし, ヤング・ラプラスの式から解析した. h_A, h_B に関する 2 次方程式から解が得られた. 丸みのある縁の場合のフェーズ A, B の無次元水面高さは式(15), (17)で, 平らな縁の場合のフェーズ A, B の無次元水面高さは式(19), (21)で表示される.



(a) $\sigma/\rho g d^2 - h/d$ の関係



(b) $d - h$ の関係

図9 平らな縁の水面の高さの解析結果と実測値の比較

引用文献

- 1) 小野周, 考える理科 10 話, 岩波ジュニア新書 (1980), 94, 81-82.
- 2) 戸田盛和, おもちゃの科学 (第 6 巻), (1995), 日本評論社, 68, .
- 3) 山本利明, 一円玉はなぜ浮かぶ?, (2002), <http://www2.hamajima.co.jp/~tenjin/labo/lyen.pdf>
- 4) 林英子, 稲場秀明, 1 円玉はなぜ水に浮かぶのか, 千葉大学教育研究紀要, 55 (2005), 345-349.
- 5) 萱東タイムズ, 萱野東小学校毎日のニュース (2008 年 07 月 03 日) 5 年理科 授業風景. <http://www.kkaosaka.sakura.ne.jp/mt/kh/archives/2008/07/post-821.html>.
- 6) 五十嵐保, 水に浮く比重 1 以上の円盤, ながれ 28-2 (2009), 149-157.