

〔連載〕非線形波動 — ソリトンを中心として —

第5章 逆散乱法

*福岡工業大学 工学部 及川正行†

この章ではまず KdV 方程式の逆散乱法による解法の発見の経緯と定常なシュレディンガー方程式の散乱問題と逆問題について数学的詳細には触れずに述べた。次に、ポテンシャルが KdV 方程式に従うときの散乱データの時間発展を計算し、反射係数が恒等的にゼロの場合の解（無反射ポテンシャルあるいは N -ソリトン解）について述べた。また、透過係数が時間に依存しないことを利用した保存則の計算法についても述べた。KdV 方程式以外の代表として NLS 方程式に対する逆散乱法についても簡単に述べ、KdV 方程式にはない特徴を紹介した。とくにソリトンの束縛状態の存在は厳密解の発見によって初めて明らかにされたものである。最後に離散的な問題の代表として戸田格子について簡単に述べた。

Chapter 5 Inverse Scattering Method

Masayuki OIKAWA, Faculty of Engineering, Fukuoka Institute of Technology

1 KdV 方程式に対する逆散乱法

1.1 Miura の変換

KdV 方程式

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = 0 \tag{5.1}$$

を考える。これに変換

$$u = v^2 + v_x \tag{5.2}$$

を代入すると

$$\begin{aligned} &u_t - 6uu_x + u_{xxx} \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x} + 2v\right)(v_t - 6v^2v_x + v_{xxx}) \end{aligned}$$

となるから、 v が MKdV 方程式

$$v_t - 6v^2v_x + v_{xxx} = 0 \tag{5.3}$$

を満たせば、(5.2) で与えられる u は KdV 方程式 (5.1) を満たす。(5.2) は **Miura の変換** と呼ばれる¹⁾。

以下で述べるようにこの変換は逆散乱法の発見に大きな役割を演じるのだが、Miura は KdV 方程式と MKdV 方程式の保存則を比較してこの変換を発見したのである。保存則とは、 $u(x, t)$ に依存する量 $T(x, t)$, $X(x, t)$ の間の関係式

$$T_t + X_x = 0 \tag{5.4}$$

のことである。たとえば、もし十分速く $X(x, t) \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) ならば、

$$\frac{d}{dt} \int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx = -[X(x, t)]_{-\infty}^{\infty} = 0 \tag{5.5}$$

となつて、 $\int_{-\infty}^{\infty} T(x, t) dx$ が保存量になるからである。KdV 方程式 (5.1) および MKdV 方程式 (5.3) ののはじめのいくつかの保存則は次のようになる：

$$\begin{aligned} \text{KdV 方程式: } &u_t + (-3u^2 + u_{xx})_x = 0 \\ &\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(-2u^3 + uu_{xx} - \frac{1}{2}u_x^2\right)_x = 0 \\ &\left(\frac{1}{3}u^3 + \frac{1}{6}u_x^2\right)_t + \left(-\frac{3}{2}u^4 + u^2u_{xx} - \frac{1}{3}u_tu_x - \frac{1}{6}u_{xx}^2\right)_x = 0 \end{aligned}$$

⋮

$$\begin{aligned} \text{MKdV 方程式: } &v_t + (-2v^3 + v_{xx})_x = 0 \\ &\left(\frac{1}{2}v^2\right)_t + \left(-\frac{3}{2}v^4 + vv_{xx} - \frac{1}{2}v_x^2\right)_x = 0 \\ &\left(\frac{1}{4}v^4 + \frac{1}{4}v_x^2\right)_t + \left(-v^6 + v^3v_{xx} - \frac{1}{2}v_tv_x - \frac{1}{4}v_{xx}^2\right)_x = 0 \end{aligned}$$

⋮

KdV 方程式に対する保存則は (5.1) の両辺にそれぞれ $1, u, u^2, \dots$ を掛けた式を変形して、MKdV 方程式に対する保存則は (5.3) の両辺にそれぞれ $1, v, v^3, \dots$ を掛けた式を変形することによってえられる。

これらの保存則は無数個存在する（ソリトン方程式の

* 〒 811-0295 福岡市東区和白東 3 丁目 30-1

† E-mail: oikawa@fit.ac.jp

特徴の1つ) ののであるが, それを示すにはたとえば次のようにする²⁾.

(5.2) を一般化して変換 (Gardner 変換)

$$u = w + \varepsilon w_x + \varepsilon^2 w^2 \quad (5.6)$$

を考える. これを (5.1) に適用すれば

$$u_t - 6uu_x + u_{xxx} = \left(1 + \varepsilon \frac{\partial}{\partial x} + 2\varepsilon^2 w\right) (w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx}) \quad (5.7)$$

となる. したがって, w が

$$\begin{aligned} w_t - 6(w + \varepsilon^2 w^2)w_x + w_{xxx} \\ = w_t + (-3w^2 - 2\varepsilon^2 w^3 + w_{xx})_x = 0 \end{aligned} \quad (5.8)$$

を満たせば, u は KdV 方程式 (5.1) を満たす. (5.6) を w について解くと

$$\begin{aligned} w(x, t; \varepsilon) &= w_0 + \varepsilon w_1 + \varepsilon^2 w_2 + \cdots \\ &= u - \varepsilon u_x - \varepsilon^2 (u^2 - u_{xx}) + \cdots \end{aligned} \quad (5.9)$$

(5.8) から, $\int_{-\infty}^{\infty} w dx$ は保存量であり, ε は任意であるから, $\int_{-\infty}^{\infty} w_n dx$ が保存量である. これを u で表せば, KdV 方程式の無限個の保存量がえられる. ただし, 意味のある保存量は ε の偶数べきの係数のみからえられることに注意しよう.

1.2 逆散乱法の発見

さて, 第1章ですでに逆散乱法の概略を述べたが, ここではそれをもう少し詳しく説明しよう. まず, (5.2) を v に対する方程式と考えると, これは Riccati 方程式であり, $v = \psi_x / \psi$ とおくことによって線形化できる. つまり

$$\frac{\psi_{xxx}}{\psi} = u \quad (5.10)$$

をえる. ところで, KdV 方程式 (5.1) はガリレイ変換

$$u = u' - \lambda, \quad x' = x - 6\lambda t, \quad t' = t \quad (5.11)$$

の下で不変, すなわち, u' は u と同じ KdV 方程式を満たすことに注目し, できるだけ一般的にするために, (5.10) で $u = u' - \lambda$ とし, そのあとで“'”を落とすと

$$\frac{\psi_{xxx}}{\psi} = u - \lambda \quad (5.12)$$

すなわち

$$\psi_{xxx} + (\lambda - u)\psi = 0 \quad (5.13)$$

をえる. これは量子力学でおなじみの方程式である. 量子力学では ψ は u をポテンシャルとする量子力学的粒子の可能な定常状態の波動関数であり, λ はそのときの (適当に無次元化された) エネルギーである. ψ と ψ_x の連続性を課するとき, λ のすべての値に対して解 ψ が存在するとは限らない. 解が存在する λ の値を固有値と呼び, 固有値 λ に対応する解 ψ を固有関数と呼ぶ. 固有値は一般に離散的な値をとる部分 (離散固有値) と連続的に分布する部分 (連続固有値) とからなる. 離散固有値 λ_n は粒子がポテンシャル u に束縛された状態のエネルギーを表し, 対応する固有関数を ψ_n とすれば, $|\psi_n(x)|^2 dx$ はその粒子が x と $x + dx$ の間に存在する確率に比例するのであった.

ポテンシャル u が KdV 方程式に従って時間的に変化しているときには, 一般的には固有値 λ と固有関数 ψ は時間的に変化するであろう. どのように変化するかを見るために

$$u = \lambda + \frac{\psi_{xx}}{\psi} \quad (5.14)$$

を KdV 方程式 (5.1) に代入して, うまく変形すると

$$\lambda_t \psi^2 + [\psi Q_x - \psi_x Q]_x = 0 \quad (5.15)$$

をえる. ただし,

$$Q = \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x \quad (5.16)$$

である. (5.16) はまた, (5.13) を用いると

$$\begin{aligned} Q &= \psi_t + 4\psi_{xxx} - 3u\psi_x - 3(u\psi)_x \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial t} + 4\frac{\partial^3}{\partial x^3} - 3u\frac{\partial}{\partial x} - 3\frac{\partial}{\partial x}u\right)\psi \end{aligned} \quad (5.17)$$

とも書ける.

ここではもつぱら $x \rightarrow \pm\infty$ のとき, 十分速く $u \rightarrow 0$ の場合を考えることにすると, 離散固有値 λ_n に対しては十分速く $\psi_n \rightarrow 0$ ($x \rightarrow \pm\infty$) となるので, (5.15) を x に関して $-\infty$ から ∞ まで積分して

$$\frac{d\lambda_n}{dt} = 0 \quad (5.18)$$

をえる. つまり, (5.13) の離散固有値は KdV 方程式の不変量である. 他の散乱データ (第1章参照) の時間依存性を知るために, 散乱データについて知る必要がある.

1.3 散乱問題

しばらく u の時間依存性を考えないことにする. u が与えられたときに, $\lambda = k^2$ ($k = \xi + i\eta$) とおいて方程式

$$\frac{d^2\psi}{dx^2} + (k^2 - u(x))\psi = 0 \quad (5.19)$$

の解を考える. $x \rightarrow \pm\infty$ のとき, 十分速く $u \rightarrow 0$ とする.

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき, $u \rightarrow 0$ だから, $x \rightarrow \pm\infty$ のとき, $\psi \rightarrow e^{\pm ikx}$ となる. そこで $f(x, k), g(x, k)$ をそれぞれ次の境界条件を満たす (5.19) の解とする.

$$\begin{aligned} f(x, k) &\rightarrow e^{ikx} \quad (x \rightarrow +\infty) \\ g(x, k) &\rightarrow e^{-ikx} \quad (x \rightarrow -\infty) \end{aligned} \quad (5.20)$$

すなわち

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow +\infty} [f(x, k)e^{-ikx}] &= 1 \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} [g(x, k)e^{ikx}] &= 1. \end{aligned} \quad (5.21)$$

$f(x, k), g(x, k)$ に対する微分方程式と境界条件は次の積分方程式に書き換えられる.

$$\begin{aligned} f(x, k) &= e^{ikx} - \int_x^\infty \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) f(y, k) dy \\ g(x, k) &= e^{-ikx} + \int_{-\infty}^x \frac{\sin k(x-y)}{k} u(y) g(y, k) dy \end{aligned} \quad (5.22)$$

あるいは

$$\begin{aligned} f(x, k)e^{-ikx} &= 1 - \int_x^\infty \frac{1 - e^{2ik(y-x)}}{2ik} u(y) f(y, k) e^{-iky} dy \\ g(x, k)e^{ikx} &= 1 - \int_{-\infty}^x \frac{1 - e^{2ik(x-y)}}{2ik} u(y) g(y, k) e^{iky} dy. \end{aligned} \quad (5.23)$$

(5.22) をえるには例えば (5.19) を $d^2\psi/dx^2 + k^2\psi = u(x)\psi$ と書き, 右辺を非同次項とみなし, 定数変化法を用いて形式的に解けばよい. (5.23) は (5.22) からえられる.

$x \rightarrow \pm\infty$ のとき, 十分速く $u \rightarrow 0$ ならば, 境界値問題の解 $f(x, k), g(x, k)$ は一意に存在し, 複素 k 平面の上半平面 $\text{Im } k \geq 0$ において連続で, $\text{Im } k > 0$ において解析的であることがわかっている. 解析性の証明はふつう Volterra 型の積分方程式 (5.22) あるいは (5.23) の逐次近似が一樣収束することによって示す. これは比較的容易である. むしろ困難なのは $\text{Im } k \geq 0$ における連続性の証明のようだ. ここではこれらの性質は証明なしに認めることにする. 証明に興味のある人は Faddeev³⁾, Deift & Trubowitz⁴⁾, 田中・伊達⁵⁾などを参照して頂きたい. また, 大宮の最近の本⁶⁾には歴史的経緯も書かれていて参考になる.

ところで, $f(x, -k), g(x, -k)$ はもちろん境界条件

$$\begin{aligned} f(x, -k) &\rightarrow e^{-ikx} \quad (x \rightarrow +\infty) \\ g(x, -k) &\rightarrow e^{ikx} \quad (x \rightarrow -\infty) \end{aligned} \quad (5.24)$$

を満たす (5.19) の解であり, 複素 k 平面の下半平面 $\text{Im } k \leq 0$ において連続で, $\text{Im } k < 0$ において解析的である.

(5.19) の2つの解 ψ_1, ψ_2 に対する Wronskian を

$$W[\psi_1, \psi_2] \equiv \frac{d\psi_1}{dx} \psi_2 - \psi_1 \frac{d\psi_2}{dx} \quad (5.25)$$

で定義しよう. dW/dx に (5.19) を用いればわかるように Wronskian の値は x によらない. また, $W \neq 0$ のとき, ψ_1, ψ_2 は1次独立, $W = 0$ のときは, 1次従属である.

しばらく k は実数としよう. それぞれ $x \rightarrow +\infty, x \rightarrow -\infty$ で評価すればわかるように

$$W[f(x, k), f(x, -k)] = 2ik \quad (5.26)$$

$$W[g(x, k), g(x, -k)] = -2ik$$

だから, $k \neq 0$ ならば, $f(x, k)$ と $f(x, -k)$ は $(g(x, k)$ と $g(x, -k)$ も) 1次独立な (5.19) の解である. したがって, 実数 $k (\neq 0)$ に対して

$$\begin{aligned} g(x, k) &= \alpha(k)f(x, -k) + \beta(k)f(x, k) \\ f(x, k) &= \bar{\alpha}(k)g(x, -k) + \bar{\beta}(k)g(x, k) \end{aligned} \quad (5.27)$$

と書ける. これらの関係を模式的に描いたものが図1である. 上図は (5.27) の第1式に対応し, 右から

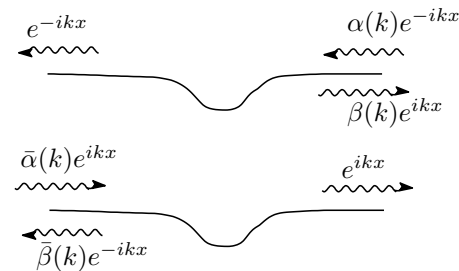


図1 上図は (5.27) の第1式に, 下図は第2式に対応する

$\alpha(k)e^{-ikx}$ の波がポテンシャルに入射して, e^{-ikx} が透過し, $\beta(k)e^{ikx}$ が反射することを表す. 下図は (5.27) の第2式に対応し, 左から $\bar{\alpha}(k)$ の波がポテンシャルに入射して, e^{ikx} が透過し, $\bar{\beta}(k)e^{-ikx}$ が反射することを表す (図の各項に $e^{-i\omega t}$ という因子を補うと分かり易いかもしれない). 入射波の振幅を1にするために, (5.27) の第1式, 第2式をそれぞれ $\alpha(k), \bar{\alpha}(k)$ で割ると

$$\begin{aligned} \frac{1}{\alpha(k)}g(x, k) &= f(x, -k) + \frac{\beta(k)}{\alpha(k)}f(x, k) \\ \frac{1}{\bar{\alpha}(k)}f(x, k) &= g(x, -k) + \frac{\bar{\beta}(k)}{\bar{\alpha}(k)}g(x, k) \end{aligned} \quad (5.28)$$

である.

$$a_R(k) = \frac{1}{\alpha(k)}, \quad b_R(k) = \frac{\beta(k)}{\alpha(k)} \quad (5.29)$$

はそれぞれ透過係数, 反射係数である. 添字 R は右からの入射を意味する.

$$a_L(k) = \frac{1}{\bar{\alpha}(k)}, \quad b_L(k) = \frac{\bar{\beta}(k)}{\bar{\alpha}(k)} \quad (5.30)$$

は左からの入射に対する透過係数と反射係数である.

(5.27) の第 2 式の $f(x, k)$ を第 1 式に代入し, $g(x, k)$ と $g(x, -k)$ の係数を比較して

$$\begin{aligned} \alpha(k)\bar{\alpha}(-k) + \beta(k)\bar{\beta}(k) &= 1 \\ \alpha(k)\bar{\beta}(-k) + \bar{\alpha}(k)\beta(k) &= 0. \end{aligned} \quad (5.31)$$

(5.27) の第 1 式の $g(x, k)$ を第 2 式に代入し, $f(x, k)$ と $f(x, -k)$ の係数を比較して

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(k)\alpha(-k) + \bar{\beta}(k)\beta(k) &= 1 \\ \bar{\alpha}(k)\beta(-k) + \alpha(k)\bar{\beta}(k) &= 0. \end{aligned} \quad (5.32)$$

また, (5.26) と (5.27) から

$$\alpha(k) = \bar{\alpha}(k) = \frac{1}{2ik} W[f(x, k), g(x, k)] \quad (5.33)$$

$$\beta(k) = \frac{1}{2ik} W[g(x, k), f(x, -k)] \quad (5.34)$$

$$\bar{\beta}(k) = \frac{1}{2ik} W[g(x, -k), f(x, k)] \quad (5.35)$$

がえられる. (5.33) から

$$a_R(k) = a_L(k) \quad (\equiv a(k) \text{ と書こう}) \quad (5.36)$$

がわかる.

k が実数のとき, $u(x)$ は実数値関数だから

$$f(x, -k) = f^*(x, k), \quad g(x, -k) = g^*(x, k) \quad (5.37)$$

が成り立つ. ただし, $*$ は複素共役を表す. これを (5.33) ~ (5.35) に用いれば

$$\begin{aligned} \alpha(-k) &= \alpha^*(k), \quad \beta(k) = -\bar{\beta}^*(k) = -\bar{\beta}(-k) \\ \beta(-k) &= \beta^*(k). \end{aligned} \quad (5.38)$$

したがって, (5.31) と (5.32) の第 1 式は, 実数 k に対して

$$|\alpha(k)|^2 = 1 + |\beta(k)|^2 = 1 + |\bar{\beta}(k)|^2. \quad (5.39)$$

したがって, また, 実数 k に対して

$$|a(k)|^2 + |b_R(k)|^2 = |a(k)|^2 + |b_L(k)|^2 = 1 \quad (5.40)$$

が成り立つ.

$b_R(k)$ と $b_L(k)$ との関係は (5.31) と (5.32) の第 2 式から

$$b_R(k)a(-k) + b_L(-k)a(k) = 0 \quad (5.41)$$

である. (5.38) を用いれば

$$b_R(-k) = b_R^*(k), \quad b_L(-k) = b_L^*(k) \quad (5.42)$$

であることがわかる.

$f(x, k), g(x, k)$ は上半平面 $\text{Im } k > 0$ において解析的であるから, (5.33) から $\alpha(k) = \bar{\alpha}(k)$ はやはり複素 k 平面の上半平面 $\text{Im } k > 0$ において解析的である.

(5.23) から, 複素 k 平面の上半平面 $\text{Im } k > 0$ において, $|k| \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} f(x, k)e^{-ikx} &= 1 - \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(y)dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \\ g(x, k)e^{ikx} &= 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^x u(y)dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \end{aligned} \quad (5.43)$$

が成り立つ. また, 複素 k 平面の下半平面 $\text{Im } k < 0$ において,

$$f(x, -k)e^{ikx} = 1 + \frac{1}{2ik} \int_x^\infty u(y)dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (5.44)$$

が成り立つ. さらに, (5.23) の第 2 式で $x \rightarrow \infty$ とし, (5.27) の第 1 式, (5.20) を用いると

$$\alpha(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty u(y)g(y, k)e^{iky}dy \quad (5.45)$$

が成り立つ. したがって, $\text{Im } k > 0$ において, $|k| \rightarrow \infty$ のとき

$$\alpha(k) = 1 - \frac{1}{2ik} \int_{-\infty}^\infty u(y)dy + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (5.46)$$

である.

$f(x, k)$ などの正則領域は $u(x)$ が無限遠で速く 0 に近づけば近づくほど広がる. とくに $u(x)$ が有限領域でのみゼロでなく, しかも何回でも微分可能とする. つまり $u(x)$ が compact support に属するならば, $f(x, k)$ 等は整関数 (無限遠点を除いて正則な関数) となる.

次に, $\alpha(k)$ の零点を考えよう. (5.39) から, 実軸上には $\alpha(k)$ の零点がないことは明らかである. $\alpha(k)$ の上半平面 $\text{Im } k > 0$ にある零点を考える. まず, $\text{Im } k > 0$ で $\alpha(k)$ は正則で, $\alpha(k) \rightarrow 1$ ($|k| \rightarrow \infty$) だから, $\alpha(k)$ の $\text{Im } k > 0$ での零点は有限個しかないことに注意しよう. それらの零点の 1 つを k_0 とする. すなわち

$$\alpha(k_0) = 0, \quad \text{Im } k_0 > 0. \quad (5.47)$$

このとき, (5.27) の第 1 式から

$$g(x, k_0) = \beta(k_0)f(x, k_0). \quad (5.48)$$

つまり, $f(x, k_0), g(x, k_0)$ は 1 次従属で $f(x, k_0)$ (また $g(x, k_0)$ も) は $|x| \rightarrow \infty$ で指数関数的にゼロになる. また, $\alpha(k) = \bar{\alpha}(k)$ と (5.27) の第 2 式から

$$\bar{\beta}(k_0) = \frac{1}{\beta(k_0)}$$

をえる。

k_0 は純虚数である。つまり、 $\lambda = k_0^2$ は実数である。これは

$$\begin{aligned} f''(x, k_0) + [\lambda - u(x)]f(x, k_0) &= 0, \\ f^{*''}(x, k_0) + [\lambda^* - u(x)]f^*(x, k_0) &= 0 \end{aligned}$$

(ただし、プライムは x に関する導関数を表す) の第 1 式に $f^*(x, k_0)$ を第 2 式に $f(x, k_0)$ を掛けて、それらの差を x について $-\infty$ から ∞ まで積分すれば

$$(\lambda - \lambda^*) \int_{-\infty}^{\infty} |f(x, k_0)|^2 dx = 0$$

となり、 λ は実数、したがって、 $k_0 = i\kappa$ は純虚数であることがわかる。また、 $\kappa > 0, \lambda = -\kappa^2$ は負である。 λ は束縛状態の固有値、 $f(x, k_0)$ は束縛状態の固有関数である。 $\alpha(k)$ の上半平面の零点の全体 $\{i\kappa_1, i\kappa_2, \dots, i\kappa_n\}$ は離散スペクトルとも呼ばれる。

次に $\dot{\alpha}(k_0)$ を計算しよう。ドットは k に関する導関数である。(5.33) から

$$\begin{aligned} \frac{d}{dk} \{2ik\alpha(k)\} &= 2i\alpha(k) + 2ik\dot{\alpha}(k) \\ &= W[\dot{f}(x, k), g(x, k)] + W[f(x, k), \dot{g}(x, k)]. \end{aligned} \quad (5.49)$$

また、

$$\begin{aligned} \dot{f}''(x, k) + k^2 \dot{f}(x, k) &= u\dot{f}(x, k) - 2kf(x, k), \\ g''(x, k) + k^2 g(x, k) &= ug(x, k) \end{aligned}$$

から

$$\dot{f}''(x, k)g(x, k) - \dot{f}(x, k)g''(x, k) = -2kf(x, k)g(x, k).$$

したがって

$$\frac{d}{dx} W[\dot{f}(x, k), g(x, k)] = -2kf(x, k)g(x, k).$$

これを x から ℓ まで積分して

$$W[\dot{f}(x, k), g(x, k)] \Big|_x^\ell = -2k \int_x^\ell f(x, k)g(x, k) dx.$$

同様にして

$$W[f(x, k), \dot{g}(x, k)] \Big|_{-\ell}^x = 2k \int_{-\ell}^x f(x, k)g(x, k) dx.$$

$k = k_0 = i\kappa$ ($\kappa > 0$) に対しては $f(x, k), g(x, k)$ が $|x| \rightarrow \infty$ でゼロになるので、Wronskian $W[\dot{f}, g], W[f, \dot{g}]$ もすべて $|x| \rightarrow \infty$ でゼロになる。したがって、上で $\ell \rightarrow \infty$ として (5.49) に代入すると

$$2ik_0\dot{\alpha}(k_0) = 2k_0 \int_{-\infty}^{\infty} f(x, k_0)g(x, k_0) dx,$$

すなわち

$$\dot{\alpha}(k_0) = \frac{1}{i}\beta(k_0) \int_{-\infty}^{\infty} f^2(x, k_0) dx \neq 0. \quad (5.50)$$

したがって、 k_0 は $\alpha(k)$ の単根である。つまり束縛状態は縮退していない。

$k = i\kappa_j$ ($\kappa_j > 0$), $\alpha(i\kappa_j) = 0$ に対応する束縛状態の固有関数を $\psi_j(x, \kappa_j)$ として、規格化条件

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi_j^2(x, \kappa_j) dx = 1 \quad (5.51)$$

を課す。

$$\psi_j(x, \kappa_j) = c_j f(x, i\kappa_j) \quad (c_j > 0) \quad (5.52)$$

と書くと、 $x \rightarrow \infty$ で

$$\psi_j(x, \kappa_j) \rightarrow c_j e^{-\kappa_j x} \quad (x \rightarrow \infty) \quad (5.53)$$

であり、(5.50) を用いると

$$\frac{\beta(i\kappa_j)}{\dot{\alpha}(i\kappa_j)} = ic_j^2 \quad (5.54)$$

となる。

1.4 逆問題

逆問題に移ろう。簡単のため $u(x)$ は compact support に属するとする。 k' 平面における積分

$$\int_C \frac{g(x, k') e^{ik'x}}{\alpha(k')(k' - k)} dk' \quad (5.55)$$

を考える。ただし、積分路 C は図 2 のように $-\infty + i0^+$

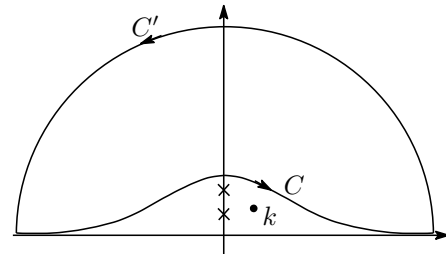


図 2 k' 平面における積分路

から $\alpha(k')$ の上半平面でのすべての零点より上側を通り $+\infty + i0^+$ までである。 k は C の下側にある。積分路 C' をつけ加えた $C + C'$ に沿う積分の値は、積分路で囲まれる領域に被積分関数が特異点をもたないので、0 である。 C' に沿う積分の値は、(5.43) の第 2 式と (5.46) を用いると $i\pi$ だから、積分 (5.55) の値は $-i\pi$ である。さらに、(5.28) の第 1 式を用いると

$$\begin{aligned} -i\pi &= \int_C \frac{g(x, k') e^{ik'x}}{\alpha(k')(k' - k)} dk' \\ &= \int_C \frac{f(x, -k') e^{ik'x}}{k' - k} dk' + \int_C \frac{\beta(k') f(x, k') e^{ik'x}}{\alpha(k')(k' - k)} dk' \end{aligned} \quad (5.56)$$

である. 図3のように C'' という積分路で閉じさせて

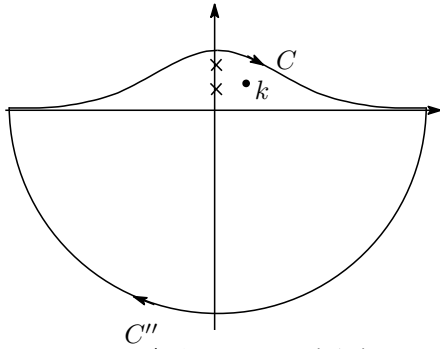


図3 k' 平面における積分路

(5.44) を用いると

$$\int_C \frac{f(x, -k') e^{ik'x}}{k' - k} dk' = -2\pi i f(x, -k) e^{ikx} + i\pi.$$

したがって,

$$f(x, -k) e^{ikx} = 1 + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{\beta(k') f(x, k') e^{ik'x}}{\alpha(k')(k' - k)} dk'. \quad (5.57)$$

ここで

$$f(x, k) = e^{ikx} + \int_x^\infty K(x, s) e^{iks} ds \quad (5.58)$$

と表せると仮定する. (5.58) を (5.57) に代入し, e^{ikz} ($z > 0$) を掛けて k について $-\infty$ から ∞ まで積分すると

$$\begin{aligned} & \int_x^\infty ds K(x, s) \int_{-\infty}^\infty e^{ik(x+z-s)} dk \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_C dk' \frac{\beta(k')}{\alpha(k')} e^{2ik'x} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikz}}{k' - k} dk \\ &+ \int_x^\infty ds K(x, s) \frac{1}{2\pi i} \int_C dk' \frac{\beta(k')}{\alpha(k')} e^{ik'(s+x)} \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikz}}{k' - k} dk. \\ & \int_{-\infty}^\infty e^{ik(x+z-s)} dk = 2\pi \delta(s-x-z) \quad (s > x \text{ だから}) \\ & \int_{-\infty}^\infty \frac{e^{ikz}}{k' - k} dk = -2\pi i e^{ik'z} \end{aligned}$$

だから

$$\begin{aligned} 2\pi K(x, x+z) &= - \int_C \frac{\beta(k')}{\alpha(k')} e^{ik'(x+x+z)} dk' \\ &- \int_x^\infty ds K(x, s) \int_C \frac{\beta(k')}{\alpha(k')} e^{ik'(s+x+z)} dk'. \end{aligned}$$

したがって, 次の Gel'and-Levitan-Marchenko (GLM) 方程式をえる.

$$K(x, y) + F(x+y) + \int_x^\infty K(x, s) F(s+y) ds = 0, \quad (x < y). \quad (5.59)$$

ただし

$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{\beta(k)}{\alpha(k)} e^{ikx}. \quad (5.60)$$

$\alpha(k)$ の上半平面の零点を $\{i\kappa_1, \dots, i\kappa_N\}$ とすると, (5.60) の積分は (5.54) を用いて

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \cdot (-2\pi i) \sum_{j=1}^N \frac{\beta(i\kappa_j)}{\dot{\alpha}(i\kappa_j)} e^{-\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\beta(k)}{\alpha(k)} e^{ikx} dk \\ &= \sum_{j=1}^N c_j^2 e^{-\kappa_j x} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty b(k) e^{ikx} dk, \quad (5.61) \end{aligned}$$

ただし, $b_R(k)$ を $b(k)$ と書いた.

(5.58) について述べておこう. $f(x, k)$ は境界条件 $f(x, k) \rightarrow e^{ikx}$ ($x \rightarrow +\infty$) を満たす (5.19) の解である. (5.58) が任意の k に対して成立しなければならないから, 少なくとも $s \rightarrow \infty$ のとき, 十分速く $K(x, s) \rightarrow 0$ でなければならない. $K(x, s)$ の存在や一意性を示すには, (5.58) を (5.19) に代入して $K(x, s)$ に対する線形偏微分方程式に帰着させる方法や積分方程式に帰着させて逐次近似解が収束することを示す方法などがある. $K(x, s)$ と $u(x)$ との関係は次のように (5.58) の $|k| \rightarrow \infty$ における漸近形を (5.43) と比較することによってもえられる. つまり, (5.58) から, $|k| \rightarrow \infty$ のとき

$$\begin{aligned} f(x, k) e^{-ikx} &= 1 + \int_x^\infty K(x, s) e^{ik(s-x)} ds \\ &= 1 - \frac{1}{ik} K(x, x) + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \quad (5.62) \end{aligned}$$

となる. ただし, $K(x, s)$ は s に関して少なくとも 2 階微分可能で $s \rightarrow \infty$ のとき, $K(x, s) \rightarrow 0$, $K_s(x, s) \rightarrow 0$ とする. これと (5.43) の第 1 式を比較して

$$K(x, x) = \frac{1}{2} \int_x^\infty u(y) dy$$

をえる. したがって

$$u(x) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) \quad (5.63)$$

である.

結局, 散乱データ

$$\{\kappa_j, c_j \ (j = 1, 2, \dots, N), b(k)\} \quad (5.64)$$

を用いてポテンシャルが再構成できることがわかる.

1.5 散乱データの時間発展

さて, $u(x, t)$ が KdV 方程式 (5.1) に従って時間発展するときの散乱データの時間発展を求めよう. このとき, (5.13) の固有値と固有関数に対して (5.15) が成り立つのであった.

(i) 離散固有値について

$d\lambda_n/dt = 0$ だから, (5.15) から

$$[\psi Q_x - \psi_x Q]_x = 0, \text{ i.e. } Q_{xx} + (\lambda - u)Q = 0$$

これは (5.13) と同じだから, この解は次のように書ける.

$$Q = \psi_t + \psi_{xxx} - 3(u + \lambda)\psi_x \\ = C\psi + D\psi \int_0^x \frac{dx}{\psi^2}. \quad (5.65)$$

ここで, $\psi \int_0^x \psi^{-2} dx$ は ψ と独立な (5.13) の解である. $\psi = \psi_n, \lambda = \lambda_n = -\kappa_n^2$ であって, $x \rightarrow \infty$ で $\psi_n = c_n(t)e^{-\kappa_n x}$ だから

$$\psi \int_0^x \frac{dx}{\psi^2} \sim e^{\kappa_n x} \quad (x \rightarrow \infty)$$

となる. したがって, $D = 0$ である. 次に, (5.65) に (5.13) を用い, ψ_n を掛けて x について $-\infty$ から ∞ ままで積分すると

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{2} \psi_n^2 dx \right)_t + \int_{-\infty}^{\infty} (\psi_n \psi_{nxx} - 2\psi_n^2 - 3\lambda_n \psi_n^2)_x dx \\ = C \int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx.$$

左辺第 2 項の積分は 0 であって, $\int_{-\infty}^{\infty} \psi_n^2 dx = 1$ だから, $C = 0$ である. したがって, $x \rightarrow \infty$ で

$$\psi_{nt} + \psi_{nxxx} - 3\lambda \psi_{nx} = 0$$

である. これに $\psi_n = c_n(t)e^{-\kappa_n x}$ を用いて

$$(c_n)_t = \kappa_n^3 c_n - 3\lambda_n \kappa_n c_n = 4\kappa_n^3 c_n \quad (5.66)$$

である.

(ii) 連続固有値について

連続固有値については λ は時間に依らないと仮定できる. このとき Q はやはり (5.65) を満足する. $\psi = g(x, k)$ とすると, (5.28) の第 1 式は漸近形

$$\psi \simeq \begin{cases} e^{-ikx} + b(k)e^{ikx}, & (x \rightarrow \infty) \\ a(k)e^{-ikx}, & (x \rightarrow -\infty) \end{cases} \quad (5.67)$$

をもつ. (5.65) で $x \rightarrow -\infty$ としてこの漸近形を用いれば

$$(a_t + ik^3 a + 3ik^3 a)e^{-ikx} \\ = Cae^{-ikx} + \frac{D}{a} e^{-ikx} \int_0^x e^{2ikx} dx.$$

したがって,

$$D = 0, \quad a_t + (4ik^3 - C)a = 0. \quad (5.68)$$

(5.65) で $x \rightarrow \infty$ として漸近形 (5.67) を用いれば

$$(b_t - 4ik^3 b)e^{ikx} + 4ik^3 e^{-ikx} = Ce^{-ikx} + Cbe^{ikx}.$$

したがって,

$$b_t - 4ik^3 b = Cb, \quad C = 4ik^3. \quad (5.69)$$

(5.68) と (5.69) から

$$a_t = 0, \quad b_t = 8ik^3 b \quad (5.70)$$

がえられる. これで, 散乱データの時間発展 (第 1 章の (1.34) 式) が示された.

1.6 KdV 方程式の保存量

KdV 方程式が無数個の保存量をもつことの Gardner 変換を利用した証明を 1.1 で紹介した. ここでは $a(k)$, したがって, $\alpha(k)$ が時間不変であることを利用した証明法を紹介しよう.

(5.20) の第 2 式の境界条件を満たす (5.19) の解 $g(x, k)$ を

$$g(x, k) = \exp \left[-ikx + \int_{-\infty}^x \Phi(y, k) dy \right] \quad (5.71)$$

と書き換える. $\text{Im } k > 0$ で $x \rightarrow \infty$ とすると, (5.27) から

$$\log \alpha(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(x, k) dx \quad (5.72)$$

をえる. $\alpha(k)$ は $|k|$ の大きいところで k の逆べきで展開できるので, $\Phi(x, k)$ も k の逆べきで展開できよう. (5.71) を (5.19) に代入すると

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} - 2ik\Phi + \Phi^2 - u = 0. \quad (5.73)$$

ここで

$$\Phi(x, k) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2ik)^n} \phi_n(x) \quad (5.74)$$

と展開すれば,

$$\begin{cases} \phi_1 = -u(x, t), \quad \phi_2 = \frac{\partial \phi_1}{\partial x}, \\ \phi_{n+1} = \frac{\partial \phi_n}{\partial x} + \sum_{j=1}^{n-1} \phi_j \phi_{n-j} \end{cases} \quad (5.75)$$

をえる. $\alpha(k)$ が時間不変であるから, $I_n = \int_{-\infty}^{\infty} \phi_n(x) dx$ は時間不変である. はじめのいくつかを計算すると

$$\phi_1 = -u, \quad \phi_2 = -u_x, \quad \phi_3 = -u_{xx} + u^2 \\ \phi_4 = -u_{xxx} + 2(u^2)_x, \\ \phi_5 = -u_{xxxx} + 3(u^2)_{xx} - 2u^3 - (u_x)^2, \dots$$

自明でない保存量は奇数番目の ϕ_n からえられる.

1.7 無反射ポテンシャル

逆散乱法の概要や (5.19) の離散固有値 $\lambda = -\kappa^2$ ($\kappa > 0$) が KdV 方程式 (5.1) のソリトン解

$$u(x, t) = -2\kappa^2 \operatorname{sech}^2 \kappa(x - x_0 - 4\kappa^2 t) \quad (5.76)$$

(ただし, x_0 は定数) に対応することはすでに第 1 章で述べた. 非線形偏微分方程式の初期値問題が一連の線形問題に帰着されるといっても実際に具体的な問題を解くことは一般には容易でない. しかし, 反射係数がゼロ, すなわち $b(k) \equiv 0$ ならば, 線形代数方程式に帰着されるため, 厳密解が容易にえられる. これについて Gardner ら⁷⁾に従って述べよう.

$\alpha(k)$ の上半平面の零点を $\{\kappa_1, \dots, \kappa_N\}$ とすれば $F(x) = \sum_{j=1}^N c_j^2 e^{-\kappa_j x}$ であるから, GLM 方程式 (5.59) は

$$\begin{aligned} K(x, y) + \sum_{j=1}^N c_j^2 \exp\{-\kappa_j(x+y)\} \\ + \sum_{j=1}^N c_j^2 \exp(-\kappa_j y) \int_x^\infty \exp(-\kappa_j s) K(x, s) ds = 0 \end{aligned}$$

となる. ここで, $c_j \equiv c_j(t) = c_j(0) \exp(4\kappa_j^3 t) > 0$ である.

$$K(x, y) = - \sum_{j=1}^N c_j q_j(x) \exp(-\kappa_j y) \quad (5.77)$$

とおくと, 上の方程式は未知関数 $q_j(x)$ に対する連立 1 次方程式

$$\begin{aligned} q_j(x) + \sum_{m=1}^N c_j c_m \frac{\exp\{-(\kappa_j + \kappa_m)x\}}{\kappa_j + \kappa_m} q_m(x) \\ = c_j \exp(-\kappa_j x), \quad (j = 1, \dots, N) \end{aligned} \quad (5.78)$$

に帰着する. I を N 次単位行列, C を次の N 次行列, \mathbf{q}, \mathbf{e} を次の N 次元ベクトル

$$C \equiv \left(c_j c_m \frac{\exp\{-(\kappa_j + \kappa_m)x\}}{\kappa_j + \kappa_m} \right) \quad (5.79)$$

$$\mathbf{q} \equiv \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_N \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e} \equiv \begin{pmatrix} c_1 \exp(-\kappa_1 x) \\ c_2 \exp(-\kappa_2 x) \\ \vdots \\ c_N \exp(-\kappa_N x) \end{pmatrix} \quad (5.80)$$

とすると, (5.78) は

$$(I + C)\mathbf{q} = \mathbf{e} \quad (5.81)$$

と書ける. これが一意的な解をもつためには C が正定値であることを示せば十分である. p_1, \dots, p_N を任意

の実変数とするとき

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^N \sum_{m=1}^N p_j p_m c_j c_m \frac{\exp\{-(\kappa_j + \kappa_m)x\}}{\kappa_j + \kappa_m} \\ = \int_x^\infty ds \left(\sum_{j=1}^N p_j c_j \exp(-\kappa_j s) \right)^2 \end{aligned}$$

であって, これは正定値だから行列 C は正定値である.

$\Delta = \det(I + C)$ とする. Δ を x で微分するために各列を微分して加えると

$$\frac{d\Delta}{dx} = - \sum_{m=1}^N c_m \exp(-\kappa_m x) \Delta_m \quad (5.82)$$

となる. ただし, Δ_m は Δ の第 m 列をベクトル \mathbf{e} で置き換えた行列式である. クラメールの公式によって

$$q_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}, \dots, q_N = \frac{\Delta_N}{\Delta} \quad (5.83)$$

だから

$$\frac{1}{\Delta} \frac{d\Delta}{dx} = - \sum_{m=1}^N c_m \exp(-\kappa_m x) q_m = K(x, x). \quad (5.84)$$

したがって, 無反射ポテンシャルは

$$u(x, t) = -2 \frac{d}{dx} K(x, x) = -2 \frac{d^2}{dx^2} \log \Delta \quad (5.85)$$

と書ける.

(5.78) の解 $q_j(x)$ は (5.19) の κ_j に対応する規格化された固有関数 ψ_j に等しいことが証明できる⁷⁾. また, 上で求めた無反射ポテンシャルは, これらを用いて

$$u(x, t) = -4 \sum_{j=1}^N \kappa_j \psi_j^2(x, t) \quad (5.86)$$

と書けることもわかっている⁷⁾.

漸近形を調べれば, 無反射ポテンシャルは N 個のソリトンの相互作用を表すことがわかる. 詳しいことは省くが $\kappa_1 > \kappa_2 > \dots > \kappa_N$ と仮定し, n を $1, 2, \dots, N$ のどれかとして $\xi \equiv x - 4\kappa_n t$ とおくと

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow \infty \\ \xi: \text{fixed}}} u(x, t) = -2\kappa_n^2 \operatorname{sech}^2 [\kappa_n(x - 4\kappa_n^2 t - \xi_n)] \\ \exp\{2\kappa_n \xi_n\} = \frac{c_n(0)^2}{2\kappa_n} \prod_{j=1}^{n-1} \left(\frac{\kappa_n - \kappa_j}{\kappa_n + \kappa_j} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.87)$$

となり

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{t \rightarrow -\infty \\ \xi: \text{fixed}}} u(x, t) = -2\kappa_n^2 \operatorname{sech}^2 [\kappa_n(x - 4\kappa_n^2 t - \bar{\xi}_n)] \\ \exp\{2\kappa_n \bar{\xi}_n\} = \frac{c_n(0)^2}{2\kappa_n} \prod_{j=n+1}^N \left(\frac{\kappa_n - \kappa_j}{\kappa_n + \kappa_j} \right)^2 \end{aligned} \quad (5.88)$$

となる. したがって, n 番目のソリトンは振幅 $2\kappa_n^2$, 速度 $4\kappa_n^2$ をもち, $t \rightarrow +\infty$ では $t \rightarrow -\infty$ のときよりも

$$\xi_n - \bar{\xi}_n = \frac{1}{\kappa_n} \left[\sum_{j=1}^{n-1} \log \frac{\kappa_j - \kappa_n}{\kappa_j + \kappa_n} - \sum_{j=n+1}^N \log \frac{\kappa_n - \kappa_j}{\kappa_n + \kappa_j} \right] \quad (5.89)$$

だけ位置がずれる.

反射係数がゼロでないときには厳密解は求まっていない. 初期値がソリトンを含んでいる場合には反射係数の寄与は放射波として左側に分散し, ゆっくりと減衰していく. しかし, ソリトンが存在しない場合や存在してもわずかな運動量しか含まない場合もあるので単純ではないようだ (Ablowitz & Segur の本⁸⁾ の 1.7 節を参照).

この節に関しては矢嶋先生が物理学会誌に書かれた解説⁹⁾ も参考にしたのでここで謝意を表しておきたい.

2 非線形シュレディンガー方程式に対する逆散乱

非線形シュレディンガー (NLS) 方程式は逆散乱法が KdV 方程式以外に適用された最初の例である. Zakharov & Shabat の論文¹⁰⁾ は元来ロシア語で書かれていて, 米国で翻訳されて英語版の Sov.Phys.JETP が出版されるまでは少なくとも数ヶ月かかる. 当時名古屋大学プラズマ研究所 (現核融合科学研究所の前身) で開催されたソリトンの研究会で麦林先生 (当時神戸大学教授) が英語版が出版される前にこの論文の紹介され, みんな食い入るようにそれを聞いたのを覚えている. GGKM の逆散乱の論文¹¹⁾ が 1967 年, それの拡張可能性を示した Lax の論文¹²⁾ が 1968 年であったから, 待ちに待った論文であった (多くの人が自分がやってやろうと考えていただろうが). その後は論文の洪水であった.

ここでは AKNS¹³⁾ (Ablowitz & Segur の本⁸⁾ にもある) に従って NLS 方程式の逆散乱法の概要を簡単に述べ, KdV 方程式にはない特徴的な解を述べよう.

第 1 章と少し記号が変わるが固有値問題

$$\begin{cases} v_{1x} + i\zeta v_1 = q(x, t)v_2 \\ v_{2x} - i\zeta v_2 = r(x, t)v_1, \quad r(x, t) = -q(x, t)^* \end{cases} \quad (5.90)$$

(* は複素共役を表す) と固有関数の時間発展

$$\begin{cases} v_{1t} = (-2i\zeta^2 + i|q|^2)v_1 + (2\zeta q + iq_x)v_2 \\ v_{2t} = (-2\zeta q^* + iq_x^*)v_1 - (-2i\zeta^2 + i|q|^2)v_2 \end{cases} \quad (5.91)$$

の両立条件において, $\zeta_t = 0$ と同値な条件として NLS 方程式

$$iq_t + q_{xx} + 2|q|^2q = 0 \quad (5.92)$$

がえられる.

2.1 Zakharov-Shabat 型固有値問題の散乱問題

しばらく時間は固定する. したがって, 時間変数は省略する. $|x| \rightarrow \infty$ のとき, 十分速く $|q|, |r| \rightarrow 0$ と仮定する. このとき, $|x| \rightarrow \infty$ では (5.90) の右辺がなくなるので, 次の境界条件を満たす (5.90) の解 $\phi, \bar{\phi}, \psi, \bar{\psi}$ を考えることができる. ただし, ζ は実数とする.

$x \rightarrow -\infty$ のとき

$$\phi \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x}, \quad \bar{\phi} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} \quad (5.93)$$

$x \rightarrow +\infty$ のとき

$$\psi \rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x}, \quad \bar{\psi} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} \quad (5.94)$$

$u(x, \zeta), v(x, \zeta)$ をそれぞれ u_j, v_j ($j = 1, 2$) を成分とする 2 次元列ベクトルとする. u, v の Wronskian を

$$W(u, v) \equiv u_1 v_2 - u_2 v_1 \quad (5.95)$$

で定義する. u, v が (5.90) の 2 つの解ならば,

$$\frac{d}{dx} W(u, v) = 0 \quad (5.96)$$

である. つまり, u, v が (5.90) の 2 つの解のとき, $W(u, v)$ は一定で, その値がゼロでなければ, 2 つの解 u, v は 1 次独立である. すぐわかるように

$$W(\phi, \bar{\phi}) = -1, \quad W(\psi, \bar{\psi}) = -1 \quad (5.97)$$

であるから, ψ と $\bar{\psi}$ は 1 次独立であり

$$\begin{aligned} \phi &= a(\zeta)\bar{\psi} + b(\zeta)\psi \\ \bar{\phi} &= -\bar{a}(\zeta)\psi + \bar{b}(\zeta)\bar{\psi} \end{aligned} \quad (5.98)$$

と書ける. これらと $W(\phi, \bar{\phi}) = -1$ から, 実数 ζ に対して

$$a(\zeta)\bar{a}(\zeta) + b(\zeta)\bar{b}(\zeta) = 1 \quad (5.99)$$

が成り立つ.

さて, $e^{i\zeta x}\phi, e^{-i\zeta x}\psi$ は ζ 平面の上半平面 $\text{Im}\zeta > 0$ において解析的, $e^{-i\zeta x}\bar{\phi}, e^{i\zeta x}\bar{\psi}$ は ζ 平面の下半平面 $\text{Im}\zeta < 0$ において解析的であることを示すことができる. これは通常微分方程式の境界値問題を積分方程式に変換して逐次近似解の収束性を示すことによって行う. 積分方程式は

$$\begin{aligned} \phi_1(x, \zeta)e^{i\zeta x} &= 1 + \int_{-\infty}^x M(x, y, \zeta)\phi_1(y, \zeta)e^{i\zeta y} dy \\ \phi_2(x, \zeta)e^{i\zeta x} &= \int_{-\infty}^x e^{2i\zeta(x-y)} r(y)\phi_1(y, \zeta)e^{i\zeta y} dy \end{aligned}$$

ただし, $M(x, y, \zeta) = r(y) \int_y^x e^{2i\zeta(z-y)} q(z) dz$

(5.100)

である。しかし、これ以上の説明は省略するので、気になる場合は文献^{13), 8)}を参照して頂きたい。

これらを認めると、 $a = W(\phi, \psi)$ は上半平面 $\text{Im} \zeta > 0$ において解析的であり、 $\bar{a} = W(\bar{\phi}, \bar{\psi})$ は下半平面 $\text{Im} \zeta < 0$ において解析的である。一方、 $b(\zeta) = -W(\phi, \bar{\psi})$ や $\bar{b}(\zeta) = W(\bar{\phi}, \psi)$ は上半平面あるいは下半平面で解析的となるとは限らない。しかし、 $|q|, |r|$ が $|x| \rightarrow \infty$ のときに、速く減衰すればするほど、 $e^{i\zeta x} \phi, e^{-i\zeta x} \psi$ や $e^{-i\zeta x} \bar{\phi}, e^{i\zeta x} \bar{\psi}$ の解析的な範囲は実軸を超えて拡張される。とくに、 q, r が compact support に属するならば、これらが整関数となるのは KdV 方程式のときと同様である。

次に、積分方程式を用いて大きな $|\zeta|$ に対する漸近形を部分積分によって計算する。上半平面において

$$\begin{aligned} \phi_1 e^{i\zeta x} &= 1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x r(y)q(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \\ \phi_2 e^{i\zeta x} &= -\frac{1}{2i\zeta} r(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \end{aligned} \quad (5.101)$$

をえる。同様に、上半平面の大きな $|\zeta|$ に対して

$$\begin{aligned} \psi_1 e^{-i\zeta x} &= \frac{1}{2i\zeta} q(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \\ \psi_2 e^{-i\zeta x} &= 1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_x^{\infty} r(y)q(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right). \end{aligned} \quad (5.102)$$

また、下半平面における大きな $|\zeta|$ に対して、 $\bar{\phi}, \bar{\psi}$ の漸近形は

$$\begin{aligned} \bar{\phi}_1 e^{-i\zeta x} &= -\frac{1}{2i\zeta} q(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \\ \bar{\phi}_2 e^{-i\zeta x} &= -1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^x r(y)q(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \end{aligned} \quad (5.103)$$

$$\begin{aligned} \bar{\psi}_1 e^{i\zeta x} &= 1 + \frac{1}{2i\zeta} \int_x^{\infty} r(y)q(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \\ \bar{\psi}_2 e^{i\zeta x} &= -\frac{1}{2i\zeta} r(x) + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \end{aligned} \quad (5.104)$$

である。したがって、それぞれ上下半平面において $|\zeta| \rightarrow \infty$ のとき

$$a(\zeta) = 1 - \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} q(y)r(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (5.105)$$

$$\bar{a}(\zeta) = 1 + \frac{1}{2i\zeta} \int_{-\infty}^{\infty} q(y)r(y)dy + O\left(\frac{1}{\zeta^2}\right) \quad (5.106)$$

である。

$a(\zeta)$ が上半平面 $\text{Im} \zeta > 0$ において零点 ζ_k , ($k = 1, 2, \dots, N$) をもつとき、 $a = W(\phi, \psi)$ だから、 ϕ は ψ に比例する。したがって

$$\phi = b_k \psi \quad (5.107)$$

と書ける。この解は $x \rightarrow \pm\infty$ で減衰するから、 ζ_k と対応する解 (5.107) は束縛状態に対応する。

同様に、 $\zeta = \bar{\zeta}_k$, ($k = 1, 2, \dots, \bar{N}$) が $\bar{a}(\zeta)$ の下半平面 $\text{Im} \zeta < 0$ における零点ならば、これらと対応する解

$$\bar{\phi} = \bar{b}_k \bar{\psi} \quad (5.108)$$

も束縛状態に対応する。

q, r が compact support に属するならば、 a, b, \bar{a}, \bar{b} は整関数となるから、 $b_k = b(\zeta_k), \bar{b}_k = \bar{b}(\bar{\zeta}_k)$ である。また、 q, r が $|x| \rightarrow \infty$ で十分速く減衰するときには、 $a(\zeta), \bar{a}(\zeta)$ はそれぞれ上半平面、下半平面において解析的であるだけでなく、実軸上でも解析的であることを示せる。しかも a, \bar{a} はどちらも $|\zeta| \rightarrow \infty$ で 1 に漸近するから、それぞれの零点は有限個である。

さて、いま考えている NLS 方程式の場合には $r = -q^*$ の関係があるが、このとき、(5.90) と境界条件 (5.93), (5.94) から対称性

$$\bar{\psi}(x, \zeta) = \begin{pmatrix} \psi_2^*(x, \zeta^*) \\ -\psi_1^*(x, \zeta^*) \end{pmatrix}, \quad \bar{\phi}(x, \zeta) = \begin{pmatrix} \phi_2^*(x, \zeta^*) \\ -\phi_1^*(x, \zeta^*) \end{pmatrix} \quad (5.109)$$

がえられる (例えば、 $\psi_2^*(x, \zeta^*) = [\psi_2(x, \zeta^*)]^*$ のことである)。 $a = W(\phi, \psi)$ などを用いれば、これらから

$$\bar{a}(\zeta) = a^*(\zeta^*), \quad \bar{b}(\zeta) = b^*(\zeta^*) \quad (5.110)$$

がえられ、さらにこれらから

$$\bar{N} = N, \quad \bar{\zeta}_k = \zeta_k^*, \quad \bar{C}_k = C_k^* \quad (5.111)$$

がえられる。このことは、離散固有値がつねに ζ_k とその複素共役 ζ_k^* のペアで現れることを意味する。

2.2 逆問題

簡単のため、 a, \bar{a}, b, \bar{b} は整関数と仮定する。

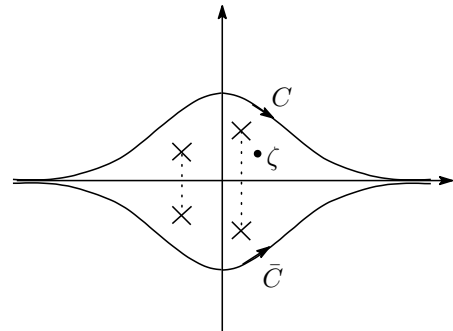


図4 ζ' 平面における積分路

図4のような ζ' 平面における積分路 C と C' を考える。 C は $-\infty + i0^+$ からはじまり、 a のすべての零点より

上を通り, $+\infty+i0^+$ に至る積分路, C' は $-\infty+i0^-$ から始まり, \bar{a} のすべての零点より下を通り, $+\infty+i0^-$ に至る積分路である. ζ を 2 つの積分路の間にある点として, まず C に沿う積分

$$\int_C \frac{\phi(x, \zeta') e^{i\zeta' x}}{a(\zeta')(\zeta' - \zeta)} d\zeta' \quad (5.112)$$

を考える. この積分路を上半平面の無限に大きな半径をもつ半円で閉じさせ, 漸近形 (5.101) と (5.105) を用いると, (5.112) の値は $-i\pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ であることがわかる.

次に, (5.98) を用いて, 積分 (5.112) を $\bar{\psi}$, ψ 含む積分に書き換え, $\bar{\psi}$ を含む項の積分については積分路を下半平面の無限に大きな半径をもつ半円で閉じさせ, 漸近形 (5.104) と留数定理を用いると

$$\bar{\psi}(x, \zeta) e^{i\zeta x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{b(\zeta') \psi(x, \zeta') e^{i\zeta' x}}{a(\zeta')(\zeta' - \zeta)} d\zeta' \quad (5.113)$$

である. 同様に積分路 \bar{C} に沿った積分

$$\int_{\bar{C}} \frac{\bar{\phi}(x, \zeta') e^{-i\zeta' x}}{\bar{a}(\zeta')(\zeta' - \zeta)} d\zeta' \quad (5.114)$$

は

$$\psi(x, \zeta) e^{-i\zeta x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2\pi i} \int_{\bar{C}} \frac{\bar{b}(\zeta') \bar{\psi}(x, \zeta') e^{-i\zeta' x}}{\bar{a}(\zeta')(\zeta' - \zeta)} d\zeta'. \quad (5.115)$$

さて, KdV 方程式のときと同様に $\psi, \bar{\psi}$ に対する次の積分表示を仮定する.

$$\begin{aligned} \psi &= \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} + \int_x^\infty K(x, s) e^{i\zeta s} ds \\ \bar{\psi} &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-i\zeta x} + \int_x^\infty \bar{K}(x, s) e^{-i\zeta s} ds. \end{aligned} \quad (5.116)$$

ここで, K, \bar{K} は例えば, $K(x, s) = \begin{pmatrix} K_1(x, s) \\ K_2(x, s) \end{pmatrix}$ のような 2 成分をもつベクトルである. K, \bar{K} が ζ を含まない点が重要である. このような K, \bar{K} の存在と一意性の証明は省略するが, K と q の関係

$$q(x) = -2K_1(x, x), \quad \int_x^\infty |q(y)|^2 dy = -2K_2(x, x) \quad (5.117)$$

は上半平面の大きな $|\zeta|$ に対する漸近形 (5.102) と (5.116) からえられる漸近形を比較することによってえられる.

(5.116) を (5.114), (5.115) に代入して, KdV 方程式のときと同様に ζ (KdV のときは k だった) についてフー

リエ変換すれば, 次の GLM 方程式がえられる.

$x < y$ に対して

$$\begin{aligned} \bar{K}(x, y) + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} F(x+y) + \int_x^\infty K(x, s) F(s+y) ds &= 0 \\ K(x, y) - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \bar{F}(x+y) - \int_x^\infty \bar{K}(x, s) \bar{F}(s+y) ds &= 0. \end{aligned} \quad (5.118)$$

ただし,

$$\begin{aligned} F(x) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_C \frac{b(\zeta)}{a(\zeta)} e^{i\zeta x} d\zeta \\ \bar{F}(x) &\equiv \frac{1}{2\pi} \int_{\bar{C}} \frac{\bar{b}(\zeta)}{\bar{a}(\zeta)} e^{-i\zeta x} d\zeta. \end{aligned} \quad (5.119)$$

$a(\zeta)$ の零点が実数だとすると, 対応する解は $|x| \rightarrow \infty$ で減衰しないから, 通常の 2 乗可積分な固有関数ではない. したがって, いま考えている系では実数は離散固有値にはならない. $a(\zeta)$ の零点 ζ_k が (および $\bar{a}(\zeta)$ の零点 $\bar{\zeta}_k$ も) すべて単純ならば, (5.119) は

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{b(\xi)}{a(\xi)} e^{i\xi x} d\xi \\ &\quad - i \sum_{k=1}^N C_k e^{i\zeta_k x}, \quad C_k = \frac{b(\zeta_k)}{a'(\zeta_k)} \end{aligned} \quad (5.120)$$

$$\begin{aligned} \bar{F}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^\infty \frac{\bar{b}(\xi)}{\bar{a}(\xi)} e^{i\xi x} d\xi \\ &\quad + i \sum_{k=1}^{\bar{N}} \bar{C}_k e^{-i\bar{\zeta}_k x}, \quad \bar{C}_k = \frac{\bar{b}(\bar{\zeta}_k)}{\bar{a}'(\bar{\zeta}_k)} \end{aligned} \quad (5.121)$$

となる. q, r がゆっくり減衰するために a, \bar{a}, b, \bar{b} が解析的に延長できない場合にも (5.120), (5.121) は成り立つ. しかし, その場合は C_k, \bar{C}_k は固有関数 $\phi_k = \phi(x, \zeta_k)$, $\psi_k = \psi(x, \zeta_k)$ の比例定数から決まる. 例えば, $\phi_k = b_k \psi_k$ のとき, $C_k = \frac{b_k}{a'(\zeta_k)}$ である.

$r = -q^*$ の場合には, すでに見た対称性を用いて

$$\bar{F}(x) = F^*(x), \quad \bar{K}(x, y) = \begin{pmatrix} K_2^*(x, y) \\ -K_1^*(x, y) \end{pmatrix} \quad (5.122)$$

がえられる. このとき, (5.118) は

$$\begin{aligned} K_1(x, y) - F^*(x+y) \\ + \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z) F(z+s) F^*(s+y) ds dz &= 0 \end{aligned} \quad (5.123)$$

に帰着する.

結局,

$$\left\{ \zeta_k, C_k, (k = 1, 2, \dots, N), \frac{b(\xi)}{a(\xi)} \right\} \quad (5.124)$$

がわかれば, ポテンシャル $q(x)$ が復元できるから, これが散乱データである.

2.3 散乱データの時間発展

散乱データの時間発展を求めるために、境界条件 (5.93), (5.94) を満たす関数 $\phi, \bar{\phi}, \psi, \bar{\psi}$ の時間変化を求める必要がある. $x \rightarrow -\infty$ のとき, $q, r \rightarrow 0$ だから, (5.91) は

$$\begin{cases} v_{1t} = -2i\zeta^2 v_1 \\ v_{2t} = 2i\zeta^2 v_2 \end{cases} \quad (5.125)$$

となる. このとき $v_1 \propto e^{-2i\zeta^2 t}$, $v_2 \propto e^{2i\zeta^2 t}$ であるから, $x \rightarrow -\infty$ での境界条件を考え合わせると, $\phi e^{-2i\zeta^2 t}$, $\bar{\phi} e^{2i\zeta^2 t}$ が (5.91) を満たす. したがって

$$\begin{cases} \phi_{1t} = i|q|^2 \phi_1 + (2\zeta q + iq_x) \phi_2 \\ \phi_{2t} = (-2\zeta q^* + iq_x^*) \phi_1 + (4i\zeta^2 - i|q|^2) \phi_2 \end{cases} \quad (5.126)$$

また

$$\begin{cases} \bar{\phi}_{1t} = (-4i\zeta^2 + i|q|^2) \bar{\phi}_1 + (2\zeta q + iq_x) \bar{\phi}_2 \\ \bar{\phi}_{2t} = (-2\zeta q^* + iq_x^*) \bar{\phi}_1 - i|q|^2 \bar{\phi}_2 \end{cases} \quad (5.127)$$

である. (5.126) で $x \rightarrow \infty$ とした式に

$$\begin{aligned} \phi &= a\bar{\psi} + b\psi \\ &\sim a \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} e^{-\zeta x} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} e^{i\zeta x} = \begin{pmatrix} ae^{-i\zeta x} \\ be^{i\zeta x} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.128)$$

を用いると

$$a_t = 0, \quad b_t = 4i\zeta^2 b \quad (5.129)$$

をえる. 同様にして (5.127) から, $\bar{a}_t = 0$, $\bar{b}_t = -4i\zeta^2 \bar{b}$ もえられる.

これらから

$$\begin{cases} a(\zeta, t) = a(\zeta, 0) \text{ したがって } \zeta_k = \text{一定} \\ b(\zeta, t) = b(\zeta, 0) e^{4i\zeta^2 t} \\ C_k = C_{k,0} e^{4i\zeta_k^2 t}, \quad (k = 1, \dots, N) \end{cases} \quad (5.130)$$

をえる. したがって, 時間依存性を含めた $F(x)$ は

$$\begin{aligned} F(x, t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{b(\xi, 0)}{a(\xi, 0)} e^{i\xi x + 4i\xi^2 t} d\xi \\ &\quad - i \sum_{k=1}^N C_{k,0} e^{i\zeta_k x + 4i\zeta_k^2 t} \end{aligned} \quad (5.131)$$

となる. これで無限区間における NLS 方程式 (5.92) の逆散乱法が完成した.

2.4 ソリトン解と離散固有値の対応

$b(\xi, 0) \equiv 0$ の場合の解を考えよう. $N = 1$ で $\zeta = \xi + i\eta$, ($\eta > 0$) が a のただ 1 つの零点であるとする. このとき,

$$F(x) = -iC(t)e^{i\zeta x}, \quad C(t) = C_0 e^{4i\zeta^2 t} \quad (5.132)$$

であるから, (5.123) は

$$\begin{aligned} &K_1(x, y) - iC^*(t)e^{-i\zeta^*(x+y)} \\ &+ \int_x^\infty \int_x^\infty K_1(x, z) |C(t)|^2 e^{i\zeta z} e^{is(\zeta - \zeta^*)} e^{-i\zeta^* y} ds dz = 0 \end{aligned} \quad (5.133)$$

となる. $K_1(x, y) = p(x)e^{-i\zeta^* y}$ とおくと, 上式は $p(x)$ の代数方程式となって容易に解けて, 結局

$$K_1(x, y) = iC^* e^{-i\zeta^*(x+y)} \left[1 + \frac{|C|^2 e^{-4\eta x}}{4\eta^2} \right]^{-1}. \quad (5.134)$$

がえられる. したがって

$$\begin{aligned} q(x, t) &= -2K_1(x, x) = \frac{-2iC^* e^{-2i\xi x}}{e^{2\eta x} + \frac{|C|^2}{4\eta^2} e^{-2\eta x}} \\ &= 2\eta \operatorname{sech} [2\eta(x - x_0) + 8\xi\eta t] \exp[-i\{2\xi x \\ &\quad + 4(\xi^2 - \eta^2)t + \phi_0 + \pi/2\}], \end{aligned} \quad (5.135)$$

ただし,

$$C_0^* = |C_0| e^{i\phi_0}, \quad x_0 = \frac{1}{2\eta} \log \frac{|C_0|}{2\eta}. \quad (5.136)$$

これは包絡ソリトン解であって, 2η が振幅 (と幅の逆数) を, -4ξ が速度を表している. 離散固有値の実部が速度に比例し, 虚部が振幅に比例するのである. したがって, すべての離散固有値の実部が異なっていれば, Zakharov & Shabat¹⁰⁾ によって示されているようにソリトンは漸近的に分離するのであるが, 離散固有値の実部が同じで虚部が異なるような複数の離散固有値に対応する解はソリトンに分離せず周期的に脈動する解になる. このような解はソリトンの束縛状態と言われる¹⁰⁾.

3 戸田格子

3.1 戸田格子に対する Lax 形式

離散的なソリトン方程式の典型に戸田格子^{14,15)} がある. すでに第 1 章で述べたがもう一度書いておくと, 戸田格子におけるバネのポテンシャルはバネの伸びを r とすると

$$\phi(r) = \frac{a}{b} e^{-br} + ar - \frac{a}{b} \quad (ab > 0) \quad (5.137)$$

である. これを適当に無次元化して, k 番目の粒子の変位 Q_k とすれば, 戸田格子に対する方程式は

$$\frac{d^2 Q_k}{dt^2} = e^{-(Q_k - Q_{k-1})} - e^{-(Q_{k+1} - Q_k)} \quad (5.138)$$

となる. この方程式の逆散乱法による解法は Flaschka によってはじめて行われた^{16,17)}. Flaschka は新しい変数

$$a_k = \frac{1}{2} e^{-(Q_{k+1} - Q_k)/2}, \quad b_k = -\frac{1}{2} \frac{dQ_k}{dt} \quad (5.139)$$

を導入し, (5.138) を

$$\begin{cases} \frac{da_k}{dt} = a_k(b_{k+1} - b_k) \\ \frac{db_k}{dt} = 2(a_k^2 - a_{k-1}^2) \end{cases} \quad (5.140)$$

と書き換えた. 例えば, 周期境界条件 $Q_{k+n} = Q_k$ の場合には行列

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & a_n \\ a_1 & b_2 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & b_3 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-1} & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \quad (5.141)$$

$$B = \begin{pmatrix} 0 & a_1 & 0 & 0 & \cdots & -a_n \\ -a_1 & 0 & a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & -a_2 & 0 & a_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n-1} \\ a_n & 0 & 0 & \cdots & -a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.142)$$

を導入すると, (5.140) は

$$\frac{dL}{dt} = [L, B] \equiv LB - BL \quad (5.143)$$

のように Lax 形式で書かれる.

逆散乱法による戸田格子の解析については Flaschka による原論文^{16,17)} や戸田先生の著書¹⁸⁾ を参照して頂こう. また, 高崎の本¹⁹⁾ には戸田格子あるいはそれに関連する方程式を中心にソリトン理論全体が展開されていてソリトン理論に興味をもっている読者には大変参考になると思う.

3.2 戸田分子方程式の解法と QR アルゴリズム

最近, 離散可積分系がさかんに研究されていて, 様々な応用や他の分野との関係が明らかにされつつある²⁰⁾. ここでは一例として有限非周期戸田 (戸田分子) 方程式と行列の固有値計算に対する QR アルゴリズムとの関係を指摘しておこう.

行列の固有値問題は代数方程式を解くことに帰着するが, 5 次以上の代数方程式は一般に解析的には解けないからなんらかのアルゴリズムを用いて近似的に解く必要がある. それらのアルゴリズムの中で最もよく知られ, 収束も速いのが QR アルゴリズムである.

QR アルゴリズムの手順は次の通りである. M を相異なる固有値をもつ与えられた実対称行列とする. まず, M を QR 分解により

$$M = QR$$

と分解する. Q は直交行列, R は上三角行列である. QR 分解は M が正則なら常に可能で, R の対角成分を正とすれば, 分解は一意的である. 具体的には QR 分解は次のようにする.

M の列ベクトルを $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ とすれば, これらは 1 次独立である. これらを Gram-Schmidt の直交化によって正規直交化したものを $\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n$ とすると, これらを列ベクトルとする行列が Q である. つまり

$$\mathbf{q}_1 = \mathbf{x}_1/|\mathbf{x}_1|, \quad \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \sum_{k=1}^n x_k y_k, \quad |\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}_k = \mathbf{x}_k - \sum_{j=1}^{k-1} (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{q}_j) \mathbf{q}_j \\ \mathbf{q}_k = \mathbf{p}_k/|\mathbf{p}_k|, (k = 2, 3, \dots, n) \end{cases}$$

として

$$Q = (\mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2, \dots, \mathbf{q}_n).$$

また, $R = (r_{jk})$ とすれば

$$r_{jk} = \begin{cases} \mathbf{x}_k \cdot \mathbf{q}_j & (j < k) \\ |\mathbf{x}_k - \sum_{i=1}^{k-1} (\mathbf{x}_k \cdot \mathbf{q}_i) \mathbf{q}_i| & (j = k) \\ 0 & (j > k) \end{cases}$$

である.

M を QR 分解した Q と R の順序を入れ換え, M' を

$$M' = RQ$$

と定める. $M' = Q^T M Q$ であるから, $M \rightarrow M'$ の下で固有値は不変である. 同様に QR 分解と順序の交換によって

$$M' = Q'R', \quad M'' = R'Q'$$

と定める. $M'' = (QQ')^T M QQ'$ に注意する. このような直交変換の繰り返しによって $M \rightarrow M' \rightarrow M'' \rightarrow \dots$ は M の固有値から成る対角行列

$$M^{(\infty)} = \begin{pmatrix} \nu_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \nu_n \end{pmatrix}$$

に収束する. 証明は数値解析の本を参照してほしい. (M が一般の正則行列の場合は対角成分は固有値に収束するが, 非対角成分は振動し, 一般に一定の行列には収束しない.) このようにして行列 M の固有値を計算するのが QR 法である.

次に, 有限非周期戸田 (戸田分子) 方程式を考える. これは $k = 1, 2, \dots, n$ に対しは (5.138) であり, さらに境界条件

$$e^{-(Q_1 - Q_0)} = 0, \quad e^{-(Q_{n+1} - Q_n)} = 0$$

を置く. このためには形式的な境界条件

$$Q_0 = -\infty, Q_{n+1} = +\infty$$

を採用すればよい.

(5.143) によって変数 a_k, b_k に移れば, 微分方程式系

$$\begin{cases} \frac{da_k}{dt} = a_k(b_{k+1} - b_k), & (k=1, 2, \dots, n-1) \\ \frac{db_k}{dt} = 2(a_k^2 - a_{k-1}^2), & (k=1, 2, \dots, n) \end{cases} \quad (5.144)$$

と境界条件

$$a_0 = 0, a_n = 0 \quad (5.145)$$

をえる. この場合, 対称な 3 重対角行列

$$L = \begin{pmatrix} b_1 & a_1 & & 0 \\ a_1 & b_2 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & b_n \end{pmatrix} \quad (5.146)$$

とは反対称行列

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -a_1 & & 0 \\ a_1 & 0 & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -a_{n-1} \\ 0 & & a_{n-1} & 0 \end{pmatrix} \quad (5.147)$$

を導入すると (5.146), (5.145) は Lax 形式 (5.143) となる.

$L(t)$ の初期値を $L(0)$ とする. $a_k(0)$ は正であるから, 行列の指数関数 $\exp(L(0))$ は正則で相異なる正の固有値をもつことが示される. QR 分解によって

$$\exp(tL(0)) = Q(t)R(t) \quad (5.148)$$

と分解する.

このとき, 次のことを証明しよう.

$$L(t) = Q^T(t)L(0)Q(t) \quad (5.149)$$

証明

(5.148) を t で微分して (ドットは t に関する導関数を表す)

$$\dot{Q}(t)R(t) + Q(t)\dot{R}(t) = L(0)\exp(tL(0)) = L(0)Q(t)R(t).$$

したがって

$$Q^T(t)\dot{Q}(t) + \dot{R}(t)R^{-1}(t) = Q^T(t)L(0)Q(t) \quad (5.150)$$

が成り立つ.

ところで, 任意の正方行列 M は

$$M = \pi_S M + \pi_R M \quad (\text{一意})$$

と分解できる. ただし, $\pi_S M$ は反対称行列, $\pi_R M$ は上三角行列である. $\dot{R}(t)R^{-1}(t)$ は上三角行列の積だから, 上三角行列である. $Q^T Q = I$ を t で微分して

$$\dot{Q}^T Q + Q^T \dot{Q} = 0$$

だから

$$Q^T \dot{Q} = -\dot{Q}^T Q = -(Q^T \dot{Q})^T.$$

したがって, $Q^T \dot{Q}$ は反対称である. こうして

$$\begin{aligned} Q^T(t)\dot{Q}(t) &= \pi_S(Q^T(t)L(0)Q(t)) \\ \dot{R}(t)R^{-1}(t) &= \pi_R(Q^T(t)L(0)Q(t)) \end{aligned} \quad (5.151)$$

がわかる.

$\tilde{L}(t) = Q^T(t)L(0)Q(t)$ と置こう. (5.148) から $Q(0) = I$ だから, $\tilde{L}(0) = L(0)$. さらに,

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{L}} &= \dot{Q}^T L(0)Q + Q^T L(0)\dot{Q} \\ &= (\dot{Q}^T Q)Q^T L(0)Q + Q^T L(0)Q(Q^T \dot{Q}) \\ &= Q^T L(0)Q(Q^T \dot{Q}) - (Q^T \dot{Q})Q^T L(0)Q \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{d\tilde{L}}{dt} = [\tilde{L}, \pi_S \tilde{L}]. \quad (5.152)$$

$B = \pi_S L$ だから, (5.143) は

$$\frac{dL}{dt} = [L, \pi_S L] \quad (5.153)$$

と書ける. L と \tilde{L} は同じ微分方程式を満たし, 初期条件も $\tilde{L}(0) = L(0)$ と一致するから, すべての t に対して $\tilde{L}(t) = L(t)$ である. こうして (5.149) が示された.

つまり, 戸田分子方程式 (5.144), (5.145) を解くには, 初期値 $L(0)$ が与えられたとき, すべての t に対して既知である行列 $\exp(tL(0))$ を (5.148) のように QR 分解し, その直交行列 $Q(t)$ を用いて (5.149) のように相似変換してやればよい.

さて, (5.148) で $t=1$ とすると

$$\exp L(0) = Q(1)R(1).$$

また, (5.149) から

$$\begin{aligned} \exp L(1) &= \exp(Q^T(1)L(0)Q(1)) \\ &= Q^T(1)(\exp L(0))Q(1) = R(1)Q(1) \end{aligned}$$

だから, 結局, 戸田分子方程式の $t=0$ から $t=1$ への離散的な時間発展 $L(0) \rightarrow L(1)$ は QR アルゴリズムの 1 ステップに対応することがわかる.

謝辞

原稿について貴重なご意見を頂いたことに対して査読者の方々に感謝いたします。

引用文献

- 1) Miura, R. M.: Korteweg-de Vries equation and generalizations. I. A remarkable explicit nonlinear transformation., *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1202–1204.
- 2) Miura, R. M., Gardner, C. S. & Kruskal, M. D.: Korteweg-de Vries equation and generalizations. II. Existence of conservation laws and constants of motion, *J. Math. Phys.* **9** (1968) 1204–1209.
- 3) Faddeev, L. D.: Properties of the S-matrix of the one-dimensional Schrödinger equation, *American Mathematical Society Translations, Series 2* **65** (1967) 139–166.
- 4) Deift, P. & Trubowitz, E.: Inverse scattering on the line, *Comm. Pure Appl. Math.* **32** (1979) 121–251.
- 5) 田中俊一・伊達悦朗: *KdV 方程式* (紀伊國屋書店, 1979)
- 6) 大宮眞弓: *非線形波動の古典解析 — ソリトン, それに続く非線形の世界 —* (森北出版, 2008)
- 7) Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. & Miura, R. M.: Korteweg-de Vries equation and generalizations. VI. Methods for exact solution, *Comm. Pure Appl. Math.* **27** (1974) 97–133.
- 8) Ablowitz, M. J. & Segur, H.: *Solitons and the inverse scattering transform* (SIAM, 1981) この本の薩摩・及川による和訳がある. *ソリトンと逆散乱変換* (日本評論社, 1991) .
- 9) 矢嶋信男: 応用数学講座 非線形発展方程式と逆散乱問題法, *日本物理学会誌* **31** (1976) 205–213.
- 10) Zakharov, V. E. & Shabat, A. B.: Exact theory of two-dimensional self-focusing and one-dimensional self-modulation of waves in nonlinear media, *Soviet Phys. JETP* **34** (1972) 62–69.
- 11) Gardner, C. S., Greene, J. M., Kruskal, M. D. & Miura, R. M.: Method for solving the Korteweg-de Vries equation, *Phys. Rev. Lett.* **19** (1967) 1095–1097.
- 12) Lax, P. D.: Integrals of nonlinear equations of evolution and solitary waves, *Comm. Pure Appl. Math.* **21** (1968) 467–490.
- 13) Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C. & Segur, H.: The inverse scattering transform-Fourier analysis for nonlinear problems, *Studies Appl. Math.* **53** (1974) 249–315.
- 14) Toda, M.: Vibration of a chain with nonlinear interaction, *J. Phys. Soc. Jpn.* **22** (1967) 431–436.
- 15) Toda, M.: Wave propagation in anharmonic lattices, *J. Phys. Soc. Jpn.* **23** (1967) 501–506.
- 16) Flaschka, H.: The Toda lattice. II. Existence of integrals, *Phys. Rev. B* **9** (1974) 1924–1925.
- 17) Flaschka, H.: On the Toda Lattice. II — Inverse-Scattering Solution —, *Progr. Theor. Phys.* **51** (1974) 703–716.
- 18) 戸田盛和: *非線形格子力学 (増補版)* (岩波書店, 1987)
- 19) 高崎金久: *可積分系の世界—戸田格子とその仲間* (共立出版, 2001)
- 20) 中村佳正他: *可積分系の応用数理* (裳華房, 2000) などが参考になろう.