

〔原著論文〕

空間多次元 Navier-Stokes 方程式に対する 無反射境界条件

*東京大学 情報理工学系研究科 谷 口 隆 晴[†]

*東京大学 情報理工学系研究科 杉 原 厚 吉

空力学の諸問題を扱った数値シミュレーションにおいては、広大な現実の空間に比べ計算機の中で扱うことのできる領域は高々有限であるため、計算対象となる空間の打ち切りが必要となる。このとき、打ち切られた断面という人工的な境界が生じてしまうが、そのような人工的な境界上で特別な取り扱いをしなければ、現実には存在しない反射波が生成されてしまい、現実的な解を得ることはできない。そこで、無反射境界条件、すなわち、人工的な境界上で反射が起こらないようにするための境界条件の設定が重要となる。無反射境界条件は既にいくつか提案されているが、特に Poinso-Lele の境界条件は、その頑健性と実装の容易さから現在広く利用されている手法のひとつとなっている。しかし、Poinso-Lele の手法の基礎となった Thompson の境界条件の有効性が理論的に保証されているのは波が境界に対して垂直に入射している場合のみである。この問題点は以前から指摘され、その改善が望まれていた。本論文ではこの要望に答える。すなわち、数値計算時のデータを利用することによって、流れの向きに対する仮定をおかない Euler 方程式に対する無反射境界条件を提案し、その Navier-Stokes 方程式への拡張法について述べる。

A Characteristic Nonreflecting Boundary Condition for the Multidimensional Navier-Stokes Equations

Takaharu YAGUCHI, Kokichi SUGIHARA

Graduate School of Information Science and Technology, University of Tokyo

(Received 24 June, 2004; in revised form 24 January, 2005)

Because the computational resources are finite, one needs to truncate the computational domain when he/she simulates a physical problem. This truncation gives rise to non-physical artificial boundaries and one cannot obtain proper solutions unless appropriate boundary conditions on such boundaries are imposed. Practically nonreflecting boundary conditions, which are boundary conditions that prevent the generation of reflections, are of great importance. By the reason of the practical robustness and the simplicity of implementation, the Poinso-Lele boundary condition is one of the most popular methods for the Navier-Stokes equations right now. Their method is based on Thompson's boundary condition for the Euler equations, which, however, is essentially one-dimensional. Therefore the Poinso-Lele boundary condition is valid only when the flow is perpendicular to the boundary theoretically. Here we propose a nonreflecting boundary condition for the Euler equations which does not have the assumption on the direction of flow. We also discuss its extension to the Navier-Stokes equations. Our basic idea is to estimate the direction of the flow from numerical data.

(**KEY WORDS**): Nonreflecting Boundary Conditions, Absorbing Boundary Conditions, NSCBC, DNS, Computational Aeroacoustics, Poinso-Lele Boundary Conditions

1 はじめに

空力学の諸問題を扱うシミュレーションでは、広大な現実の空間に比べ計算機の中で扱うことのできる領域は高々有限であるため、数値計算時

*〒 113-8656 東京都文京区本郷 7-3-1

[†] E-mail: yaguchi@mist.i.u-tokyo.ac.jp

には空間を適当な大きさと打ち切らなくてはならない。このとき、空間の打ち切り面という人工的な境界上では、境界条件を与えない、という一見矛盾した境界条件が必要であり、特別な取り扱いをしなければ現実的な解を得ることはできない。

この問題の解決法として、実用的には無反射境界条件の設定がよく利用される。これは、人工的な境界上で反射を起こさないようにするための境界条件である。無反射境界条件には様々なものが提案されている^{3, 7, 17)}が、近年行われるようになってきた空力音の DNS などでは Poinsot–Lele の無反射境界条件¹²⁾がよく用いられている。Poinsot–Lele の境界条件は空間多次元非粘性圧縮流体方程式(これは Euler 方程式と呼ばれる)に対する Thompson の無反射境界条件¹⁵⁾と Dutt⁵⁾により提案された粘性項の取り扱い方法を組み合わせたものであり、実装が容易である上に経験的に頑健な手法であることが知られている。

しかし、Thompson の境界条件は空間 1 次元の場合の手法である Hedstrom の境界条件⁸⁾を境界に直交する座標軸に埋め込んだものであり、本質的に 1 次元的、すなわち、理論的には波が境界に対して垂直に入射するという仮定が置かれている。このことは以前から指摘されており、改善が望まれていた^{3, 13, 17)}。

空間多次元化については、線形の方程式に対しては既にいくつかの手法が提案されている。特に、応用上重要となる線型波動方程式に関しては、超局所解析に基づく無反射境界条件⁶⁾をはじめとする様々な研究がなされており、流れに適合した手法¹¹⁾も提案されている。また、数値実験上も 1 次元的な手法に比べ性能の大幅な改善が確認されている。一方、非線型方程式に対する多次元的方法としては境界の変形¹³⁾や超音速への加速¹⁴⁾などもあるが、PML (Perfectly Matched Layer)¹⁾などの吸収領域の付加による方法が主流である。

しかし、Hedstrom や Thompson の手法のような特性曲線法に基づく手法に関しては、真に多

次元的手法は提案されていない。実際、特性曲線を用いた空間多次元方程式に対する無反射境界条件の構成は、本質的に困難であると言われていた¹⁷⁾。というのは、音波の満たす方程式⁴⁾に対しては、方程式だけからでは波の進行方向を 1 方向に絞り込むことが出来ないためである。既存の手法ではこの問題に波が境界に対して垂直に入射する、という仮定をおくことによって対応していた。

本論文では空間多次元 Euler 方程式に対する特性曲線法を用いた真に多次元的な無反射境界条件を提案し、その Navier-Stokes 方程式への拡張法について述べる。Euler 方程式に対する無反射境界条件の構成における、波の進行方向が決まらない、という問題に対しては、数値計算時に持っている解の偏微分係数などの情報を利用することによって波の進行方向を推定する、という解決法をとった。また、実際に、噴流に先行する音波に対する数値実験を行い、確かに性能が改善されていることを確認した。なお、提案する境界条件を実装するための具体的なアルゴリズムについては付録に示してあるのでそちらを参照されたい。

2 先行研究

空間 2 次元 Euler 方程式は以下のような方程式である：

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ s \end{pmatrix} + A_1(\rho, u_1, u_2, s) \frac{\partial}{\partial x} \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ s \end{pmatrix} \\ + A_2(\rho, u_1, u_2, s) \frac{\partial}{\partial y} \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ s \end{pmatrix} = 0. \end{aligned} \quad (1)$$

ただし

$$A_1(\rho, u_1, u_2, s) = \begin{pmatrix} u_1 & \rho & 0 & 0 \\ c^2/\rho & u_1 & 0 & p/\rho s \\ 0 & 0 & u_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & u_1 \end{pmatrix},$$

$$A_2(\rho, u_1, u_2, s) = \begin{pmatrix} u_2 & 0 & \rho & 0 \\ 0 & u_2 & 0 & 0 \\ c^2/\rho & 0 & u_2 & p/\rho s \\ 0 & 0 & 0 & u_2 \end{pmatrix}$$

である。ここで ρ は密度、 p は圧力、 u_1, u_2 はそれぞれ x, y 方向の流速を表す。また、 s はエントロピーであり比熱比 γ を用いて $s = p\rho^{-\gamma}$ 、 c は音速であり $c = \sqrt{\gamma p/\rho}$ である。良く知られているように Euler 方程式は双曲型であり、任意の実数 α_1, α_2 に対して $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ は対角化可能である。

現在、広く利用されている Navier-Stokes 方程式に対する Poincot-Lele の境界条件の基礎となった Thompson の境界条件は Hedstrom によって提案された空間 1 次元の場合の無反射境界条件に基づいている。Hedstrom の境界条件は以下のようなものである。

境界条件 1 (Hedstrom) 双曲型偏微分方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

を $x > 0$ 上で考える。ただし、 u は適当な次元のベクトル、 $A(u)$ は対角化可能な正方行列である。

このとき、解が単純波であれば、境界条件

$$l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad \text{for } j \text{ s.t. } \lambda_j > 0$$

を用いると境界 $x = 0$ 上で反射は起らない。ただし、 l_j は行列 $A(u)$ の固有値 λ_j に対応する左固有ベクトルである。

この境界条件のアイディアは、左固有ベクトルをかけることで u のうち、速度 λ_j を持つ成分を抽出できることを利用し、計算領域内部に進行する波をなくす、というものである。これを Thompson は次のように多次元に拡張した。

境界条件 2 (Thompson) Euler 方程式 (1) に対して、境界 $x = 0$ 上で次の境界条件を設定する：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \mathcal{E} + A_2(u) \frac{\partial u}{\partial y} = 0.$$

ただし、 \mathcal{E} は u と同じ次元のベクトルで、各成分は

$$(\mathcal{E})_j = \min\{\lambda_j, 0\} l_j \frac{\partial u}{\partial x} r_j$$

である。ここで r_j, l_j は、行列 $A_1(u)$ の固有値 λ_j に対する右、左固有ベクトルである。

これは Hedstrom の 1 次元の境界条件を x 軸に埋め込んだものである。Thompson の境界条件や、その拡張である Poincot-Lele の境界条件は実装が容易である上に経験的に安定であることが知られているため、現在広く利用されている。

しかし、理論的には、行列 $A_1(u)$ の固有ベクトルを操作することによって波の分離が行えるのは $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ 、すなわち、 x 軸方向に 1 次元的な流れの場合のみであるため、この境界条件では流れが境界に対して垂直、という仮定が置かれてしまっていることになる。しかし、現実には波は境界に対して垂直に入射するとは限らない。そのため、波の方向に適合した真に多次元的な無反射境界条件が望まれていた。

3 空間多次元無反射境界条件の提案

この節では、空間多次元 Euler 方程式に対する新しい無反射境界条件を提案する。提案する無反射境界条件は Hedstrom の手法を Thompson とは別の考え方で多次元に拡張したものであり、Hedstrom と同様に解が単純波であると仮定して導いた。なお、特性曲線法や単純波については Jeffrey and Taniuti⁹⁾ や John¹⁸⁾ などを参照されたい。

基本的なアイディアは以下のとおりである。

1. 単純波を仮定し、数値計算時に持っているデータから特性曲線の延び方を推定する。

2. 計算領域内側に延びている特性曲線上で $du = 0$ とおく .

以下では, 簡単のために空間 2 次元の場合について考えていくが, 3 次元の場合でも同様の議論は可能である .

Euler 方程式 (1) に対して単純波解

$$u(x, y, t) = \phi(\theta) \quad (2)$$

を考え, 特性曲線法を用いて波の進行方向を推定する . ただし, θ は x, y, t に依存するスカラー値関数であり, ϕ は θ のベクトル値関数である .

まず, 単純波を仮定したことにより以下の式が成り立つ :

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{d\phi}{d\theta}, & \frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial \theta}{\partial y} \frac{d\phi}{d\theta}, \\ \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \theta}{\partial t} \frac{d\phi}{d\theta}. \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

(2) 式を (1) 式に代入し, (3) 式を利用すると

$$\left(\frac{\partial \theta}{\partial t} I + \frac{\partial \theta}{\partial x} A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u) \right) \frac{d\phi}{d\theta} = 0$$

となる . これが非自明な解を持つには

$$\det \left(\frac{\partial \theta}{\partial t} I + \frac{\partial \theta}{\partial x} A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u) \right) = 0$$

でなくてはならない . よって,

$$-\frac{\partial \theta}{\partial t} = \left(\text{行列 } \frac{\partial \theta}{\partial x} A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u) \text{ の固有値} \right)$$

なる方程式が得られる . 陽に書き下せば, 行列の各固有値に対応して

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (4)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial t} + u_1 \frac{\partial \theta}{\partial x} + u_2 \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$\pm c \sqrt{\left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2} = 0 \quad (5)$$

となる . (4) 式は多重度 2 の固有値に対応していることに注意されたい . それぞれの方程式に対する特性曲線を求めると, その延び方は (4) 式に対しては

$$\frac{dx}{dt} = u_1, \quad \frac{dy}{dt} = u_2 \quad (6)$$

となり, (5) 式に対しては

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_1 \pm c \frac{\text{sign} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)^2}}, \\ \frac{dy}{dt} &= u_2 \pm c \frac{\text{sign} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right)^2}} \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

となる . これらの式は情報の伝搬速度, すなわち, 波の速度を表すものであるが, (7) 式から波の速度を得るには $\frac{\partial \theta}{\partial y}$ および $\text{sign} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \text{sign} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$ の値が必要である . そこで, 次に, これらの値の推定方法について述べる .

まず, 単純波という仮定が成り立つ限り, (3) 式から任意の j に対して

$$\frac{\frac{\partial \theta}{\partial y}}{\frac{\partial \theta}{\partial x}} = \frac{\left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_j}{\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j} \quad (8)$$

が成り立つ . ただし $(v)_j$ でベクトル v の第 j 成分を表した . 数値計算時には (8) 式右辺は既知であるのでこれを用いることで比率 $\frac{\partial \theta}{\partial x}$ が推定できる . 次に $\frac{\partial \theta}{\partial x}, \frac{\partial \theta}{\partial y}$ の符号であるが, これらは単純波を表すパラメータ θ の選び方に依存するものであり, 推定は困難である . しかし, (7) 式では $\text{sign} \left(\frac{\partial \theta}{\partial x} \right), \text{sign} \left(\frac{\partial \theta}{\partial y} \right)$ は複合 \pm と積を構成している . そのため, 固有ベクトルとの対応がとれている限りこれらの符号は任意に定めることができ, 一般性を失うことなく $\frac{\partial \theta}{\partial x} > 0$ とおいてよい .

以上の方法により, (7) 式と推定したパラメータを用いて, 行列

$$\frac{\partial \theta}{\partial x} A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u) \quad (9)$$

の各固有ベクトルに対応する流束それぞれに対し, その速度が推定できる . 無反射境界条件を設定するためには, 推定された速度ベクトルが計算領域内側に向いている流束に対し, それに対応する成分の増分を 0 と置けばよい . すなわち, 次の条件を設定できれば良い .

境界条件 3 境界上で $j \in S$ に対して

$$l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0 .$$

ただし、指標の集合 S は $S = \{j \mid v_j \text{は計算領域内部向き}\}$ で、各 v_j は行列 (9) の固有値に対応する推定された速度ベクトルである。また、 l_j は各固有値に対する左固有ベクトルを表す。

しかし、これを設定するためには左固有ベクトル l_j が必要である。そのためには対角化する行列 (9) がわかれば良いが、 $\frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y}$ の値を直接推定するのは困難である。そこで、一般に、あるベクトル r がある行列 M のある固有値 λ に対する固有ベクトルであるとき、任意のスカラー $k \neq 0$ に対して r は行列 kM の固有値 $k\lambda$ に対応する固有ベクトルとなる、ということに着目すると、行列 (9) の固有ベクトルの代りに行列

$$A_1 + \frac{\frac{\partial \theta}{\partial y}}{\frac{\partial \theta}{\partial x}} A_2 \quad (10)$$

の固有ベクトルを用いても良いことがわかる。この行列は前述のパラメータ推定法によって推定が可能であるので、固有ベクトルを求めることができる。

よって、無反射境界条件を設定するには次のようにすれば良い。

境界条件 4 (提案手法) 境界上で $j \in S'$ に対して

$$l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0.$$

ただし、行列 (9) の固有値に対応する推定された速度ベクトルを v_j とおき、指標の集合 S' は $S' = \{j \mid v_j \text{は計算領域内部向き}\}$ で定義する。また、 l_j は各固有値に対応する行列 (10) の左固有ベクトルである。

以上で、2次元 Euler 方程式に対する流束分離法とそれを用いた無反射境界条件が構成できた。ここでの導出は2次元で行ってきたが、この境界条件は3次元の場合に対しても適用できる。

なお、ここでは計算領域内向きの流れに対してその増分を0としたが、必ずしも0にすることが最適とは限らない。事実、0にしてしまうと平

均圧力が決まらないために問題を不適切にになってしまう、といわれており、圧力の値に応じたフィードバックをかける方法などが提案されている¹²⁾。また、この値を適切に選ぶことによって無反射境界条件としての性能を改善することが出来る、ということも報告されている²⁾。

先にも述べたが、空間多次元方程式に対する特性曲線を用いた無反射境界条件の構成は、これまでは困難であるといわれていた。その理由は、音波の満たす方程式 (5) に対しては、方程式だけからでは波の進行方向は決まらないためである。本手法では、数値計算時に持っている $\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial y}$ などの情報を利用することでこの問題を解決している。

この境界条件の特徴として、計算コストと計算領域の角での取り扱いについて述べておく。

まず、計算コストについて述べる。この境界条件は周囲の点だけを用いて更新が可能な局所的境界条件である。そのため、Fourier 変換などの大域的な処理を行う必要はない。また、行列の固有値、固有ベクトルの計算についても事前計算が可能であり、余計な計算コストはかからず、既存の空間多次元無反射境界条件である Thompson の境界条件やその拡張である Poincot-Lele の境界条件の計算コストとほぼ同程度となる。

次に角での取り扱いであるが、提案した手法では境界上の各点で速度ベクトルを推定する、という方法をとっているため、境界上の全ての点で全く同じ扱いができる。それ故、角では特別な扱いをする必要はなく、他の境界上の点と同様に計算すればよい。扱いが異なるのは速度ベクトルが内部に向いているかどうかを判定する部分のみである。また、角に限らず境界がいかなる形をしていたとしても、上記の判定さえ可能であれば問題はない。

4 提案した無反射境界条件の実装法

前節で提案した境界条件は,そのまま数値計算に持ち込むにはいくつか問題点がある.この節では,どのように実装すれば数値計算が可能になるかについて述べる.提案した境界条件の設定手続きは以下のものであった.

1. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ から $\frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$ を推定する.
2. 行列 $A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u)$ の各固有値ごとに特性曲線の伸び方から速度ベクトルを求める.
3. 対応する速度ベクトルが計算領域内向きの左固有ベクトル l_j 全てに対して

$$l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0$$

とおく.

4.1 単純な実装法

具体的な実装法について,各ステップごとに述べていく.

1. $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ を用いた $\frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$ の推定.

ここでの問題は,解が単純波であれば推定にはベクトル $\frac{\partial u}{\partial x}$ のどの成分を用いても同じ結果が得られるが,数値計算の場では必ずしもそうではない,ということである.つまり,推定の際にはどの成分を用いるか,という任意性があり,この選び方によって結果が変わってしまう可能性がある.

ここでは,ひとつの解決策として最小 2 乗法による推定法を提案する.いま,解が単純波であれば (8) 式のとおり,全ての j に対して

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{(\frac{\partial u}{\partial y})_j}{(\frac{\partial u}{\partial x})_j}$$

が成り立つのであった.ただし $(v)_j$ でベクトル v の第 j 成分を表した.解が単純波であれば (8) 式中の被推定量は j によらず同じ値をとるが,数値実験上はそうとは限らない.そこで,求めた

い推定量を α_2 とおくことにして最小 2 乗法を用いると, α_2 を求める問題は次のように定式化できる:

$$\min_{\alpha_2} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{(\frac{\partial u}{\partial y})_j}{(\frac{\partial u}{\partial x})_j} - \alpha_2 \right)^2.$$

この問題の解は

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{(\frac{\partial u}{\partial y})_j}{(\frac{\partial u}{\partial x})_j}$$

となり

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} \simeq \alpha_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{(\frac{\partial u}{\partial y})_j}{(\frac{\partial u}{\partial x})_j}$$

と推定することが出来た.以後,表記の簡単化のため,この推定された $\frac{\partial \theta}{\partial y}, \frac{\partial \theta}{\partial x}$ を α_2 と記述し続けることにする.

2. 特性曲線と速度ベクトルの推定.

前述のとおり,行列 $\frac{\partial \theta}{\partial x} A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u)$ の各固有値ごとに特性曲線の伸び方は (6), (7) 式で表される.推定量 α_2 を用いるとこれらの式は

$$\frac{dx}{dt} = u_1, \quad \frac{dy}{dt} = u_2, \quad (11)$$

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= u_1 \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}} c, \\ \frac{dy}{dt} &= u_2 \pm \frac{\text{sign}(\alpha_2)}{\sqrt{1 + \alpha_2^2}} c \end{aligned} \right\} \quad (12)$$

となる.この式が各固有値に対応する速度ベクトルを表す式である.

3. 計算領域内向きの速度ベクトルに対応する左固有ベクトル l_j 全てに対して $l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0$.

この実装には Thompson の境界実装法の考案方¹⁶⁾を用いる.これは方程式系

$$\frac{\partial u}{\partial t} + A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (13)$$

に対して $l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ を実装する方法である．以下，Thompson の実装法を簡単に述べる．

まず，係数行列 $A(u)$ を $A = P\Lambda P^{-1}$ と対角化する．次に対角行列 Λ をシンボリックに

$$\check{\Lambda} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$$

などと書き直す．この表記を用いると，方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \check{A}(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \check{A}(u) = P\check{\Lambda}P^{-1} \quad (14)$$

となる．いま

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -A(u) \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15)$$

なので $l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ の代わりに $l_j A(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0$ を実装しても良い．そこで $\lambda_j = 0$ と置き換えて $\check{A}(u)$ を求め，(14) 式を解けば $l_j \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ が実装できる．

しかし，この実装法を利用するためには方程式が (15) 式の形をしていることが必要である．何故ならば，そうでないと $\frac{\partial u}{\partial t}$ の条件に帰着しないからである．本論文で提案する手法に関しては，解を単純波と仮定すれば (15) 式の形に帰着でき，この実装法を利用できる．

実際，解を単純波と仮定して $u(x, y, t) = \phi(\theta)$ とおくと Euler 方程式は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \left(A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u) \right) \frac{\partial \theta}{\partial x} \frac{d\phi}{d\theta} = 0$$

となる．ここで， l_j は行列 $\frac{\partial \theta}{\partial x} A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u)$ の左固有ベクトルであったが，それは同時に行列 $A_1(u) + \frac{\partial \theta}{\partial y} A_2(u)$ の固有ベクトルでもあったことに注意されたい．

公式 (3) を適用し，これまでの推定量 α_2 を代入すると

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (A_1(u) + \alpha_2 A_2(u)) \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (16)$$

となる．この形であれば Thompson の境界実装法を適用することができる．

以上の実装法をまとめると次のようになる．

実装法 1 (単純な実装法)

1. 推定値 α_2 を次のように決定する：

$$\alpha_2 \leftarrow \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_j \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)_j .$$

2. $\lambda_1 \leftarrow u_1 + \alpha_2 u_2, \lambda_2 \leftarrow u_1 + \alpha_2 u_2 - c, \lambda_3 \leftarrow u_1 + \alpha_2 u_2 + c .$

3. 行列 $A_1(u) + \alpha_2 A_2(u)$ の各固有値 λ_j について，表 1 で推定される速度ベクトルが内向きであれば $\lambda_j \leftarrow 0 .$

表 1 固有値と速度の対応 (単純な実装の場合)

固有値	速度
$\lambda_1 = u_1 + \alpha_2 u_2$	$\frac{dx}{dt} = u_1, \frac{dy}{dt} = u_2$
$\lambda_2 = u_1 + \alpha_2 u_2$	$\frac{dx}{dt} = u_1 + \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} c,$
$+ \sqrt{1 + \alpha_2^2} c$	$\frac{dy}{dt} = u_2 + \frac{\text{sign}(\alpha_2)}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} c$
$\lambda_3 = u_1 + \alpha_2 u_2$	$\frac{dx}{dt} = u_1 - \frac{1}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} c,$
$- \sqrt{1 + \alpha_2^2} c$	$\frac{dy}{dt} = u_2 - \frac{\text{sign}(\alpha_2)}{\sqrt{1+\alpha_2^2}} c$

4. u を次式を用いて更新する：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \check{A}(u) \frac{\partial u}{\partial x} = 0,$$

$$\check{A}(u) = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} P^{-1} .$$

4.2 実装法の改善

前節で提案した単純な実装法では，まだ計算の安定性などに難点がある．この節では，この点を改善した実装法について述べる．

前節で提案した実装法の重大な問題点として，次のようなものが挙げられる．

問題点 1

α_2 の推定の際，ゼロ除算が行われる可能性がある．ゼロで無いとしても非常に微小な値による

除算が行われる可能性があり、計算結果の信頼性が薄い。

問題点 2

境界上の更新式 (16) は $\frac{\partial u}{\partial x}$ のみを用いており、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ の情報が反映されにくい。

ここでは、これらの解決法について述べる。

問題点 1 の解決法 推定式

$$\alpha_2 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{(\frac{\partial u}{\partial y})_j}{(\frac{\partial u}{\partial x})_j}$$

は $(\frac{\partial u}{\partial x})_j \approx 0$ の場合に、ゼロ除算や計算精度の低下などといった不都合が起こり得る。

しかし、物理的には、式 $(\frac{\partial u}{\partial x})_j \approx 0$ は波が x 方向に進んでおらず、ほぼ y 方向に進んでいるということを意味する。そこでこのような場合には x と y の役割を完全に入れ替えてしまえば良い。つまり、新たに

$$\alpha_1 = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_j}{(\frac{\partial u}{\partial y})_j} \quad (17)$$

を考え α_1, α_2 のうち、より信頼できる方を用いて計算を進めるのである。どちらが信頼できるかの判断は、上記の物理的な考察から $|\alpha_1|, |\alpha_2|$ のうち小さいものを与える方を信頼する、とすれば良いであろう。また、いままで任意であった $\text{sign}(\frac{\partial \theta}{\partial x})$ 、 $\text{sign}(\frac{\partial \theta}{\partial y})$ なども信頼できる側を正と置くことにする。

問題点 2 の解決法 更新式 (16) は $\frac{\partial u}{\partial x}$ のみを用いた更新になっており、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ の影響が反映されにくい形をしている。その上、前述の問題点 1 に対する解決策を用いると $\frac{\partial u}{\partial x}$ 、 $\frac{\partial u}{\partial y}$ のどちらが採用されるかが、境界上の各点で異なる。特に、隣接する点で異なってしまうと更新のされ方に不連続性ができてしまい好ましくない。実際、数値計算を行うとこれが原因とみられる数値解の発散が確認できた。そこで、 x, y 両方の偏微分係数を

用いた更新式を提案する。

x, y の役割を入れ替えると (16) 式が導出できたのと全く同じ方法で

$$\frac{\partial u}{\partial t} + (\alpha_1 A_1 + A_2) \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad (18)$$

が導ける。ここで α_1 は、問題点 1 の解決法に現れた (17) 式で定義されるものである。

α_1 と α_2 はそれぞれ

$$\alpha_1 \approx \frac{\frac{\partial \theta}{\partial x}}{\frac{\partial \theta}{\partial y}}, \quad \alpha_2 \approx \frac{\frac{\partial \theta}{\partial y}}{\frac{\partial \theta}{\partial x}}$$

であったので単純波の仮定が成り立ち、数値誤差が入らない理想的な場合には

$$\alpha_1 \alpha_2 = 1$$

が成り立つ。これと (16) 式、(18) 式を組み合わせると更新式

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1 + |\alpha_1|} (\alpha_1 A_1 + A_2) \\ \times \left(\text{sign}(\alpha_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0, \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{1 + |\alpha_2|} (A_1 + \alpha_2 A_2) \\ \times \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \text{sign}(\alpha_2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

を得ることができる。

(19)、(20) 式は問題点 1 の解決の際、それぞれ α_1, α_2 の信頼性が高かった場合の更新式である。これらの更新式と問題 1 の解決法を合わせると次のようにまとめることができる。

実装法 2(口バストな実装法)

1. 推定量 α_1, α_2 を計算する。
2. もし $|\alpha_2| > |\alpha_1|$ ならば
 $\alpha_2 \leftarrow 1$,
 そうでなければ
 $\alpha_1 \leftarrow 1$.

3. u を次の更新式で更新する：

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{1}{|\alpha_1| + |\alpha_2|} (\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2) \times \left(\text{sign}(\alpha_1) \frac{\partial u}{\partial x} + \text{sign}(\alpha_2) \frac{\partial u}{\partial y} \right) = 0. \quad (21)$$

ただし，行列 $\alpha_1 A_1(u) + \alpha_2 A_2(u)$ の固有値は，表 1 で対応する推定速度ベクトルが計算領域内向きの場合，0 に置き直す．

なお，行列の対角化など，諸計算を陽に行った結果得られたアルゴリズムを付録に示した．

5 Navier-Stokes 方程式への適用

第 1 節で述べたとおり，Navier-Stokes 方程式を数値的に解く際，現在，広く利用されている Poinsot–Lele の無反射境界条件は Thompson の手法と Dutt の手法を組み合わせたものである．そのため，本論文で提案した手法と Dutt の手法を組み合わせることで，Navier-Stokes 方程式に対する空間多次元的な無反射境界条件を構成できる．Dutt の境界条件は，Navier-Stokes 方程式に対するエネルギー不等式を用いて，解の L^2 ノルムを抑えるように設計されている．

具体的には，付録に示した境界条件実装法に加え，例えば境界 $x = (\text{一定})$ 上では次の条件を付加すれば良い^{5, 12)}：

$$\frac{\partial \tau_{12}}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial x} = 0.$$

ここで， T は流体の温度であり， τ_{12} は剪断応力を表す．

なお，Poinsot らの論文¹²⁾ においては，

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0$$

とすべきである，とされており Dutt の論文⁵⁾ と異なっているが，ここでは Dutt に従った．実際，この境界条件を与えるための根拠は，Dutt 自身が導いたエネルギー評価に含まれる項

$$\int_{\partial\Omega} \frac{k(y-1)}{R\bar{T}} \left(\frac{\bar{T}-T}{T} \right) \frac{\partial T}{\partial x} d\sigma$$

に由来するため，2 階ではなく 1 階の偏微分係数に関する条件を与えるべきであると考えられる．

6 計算実験結果

領域左側から常温，亜音速の空気による噴流を流した場合の流れを 2 次元圧縮性 Navier-Stokes 方程式を用いて計算し，境界条件を変えて先行する音波に対する反射波の様子を比較した．計算に用いたスキームは空間方向の差分化に 6 次精度（境界上は 4 次精度）コンパクトスキーム¹⁰⁾，時間方向に 4 次精度 Runge-Kutta 法を用いた．また，コンパクトスキームを安定化するために Lele の空間フィルタ¹⁰⁾ を利用した．

得られた質量分布は Poinsot–Lele の境界条件を用いた場合は図 1 のように，本論文で提案した境界条件を用いた場合は図 2 のようになった．

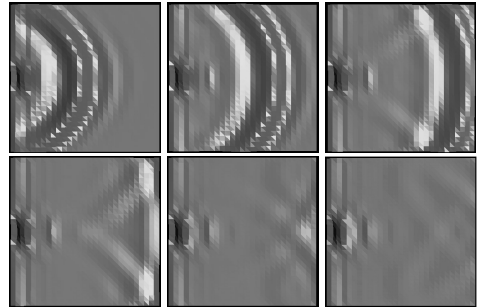


図 1 Poinsot–Lele の境界条件

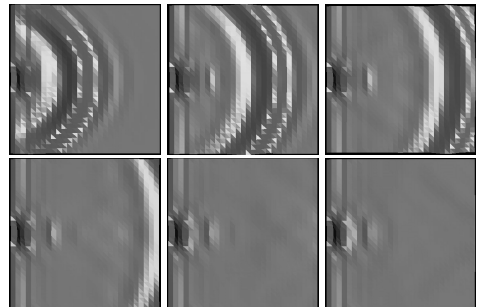


図 2 提案した境界条件

計算結果を比較すると，Poinsot–Lele の境界条件を用いた場合には，波が垂直に入射していない上下の境界上で反射波が見られるのに対し，今回提案した手法では，わずかな反射はみられるものの大幅に改善されていることがわかる．

$$\frac{\partial}{\partial t} \begin{pmatrix} \rho \\ \rho u_1 \\ \rho u_2 \\ \rho(e + \frac{u_1^2 + u_2^2}{2}) \end{pmatrix} + \frac{1}{|\alpha_1| + |\alpha_2|} \check{A} \left(\text{sign}(\alpha_1) \frac{\partial}{\partial x} + \text{sign}(\alpha_2) \frac{\partial}{\partial y} \right) \begin{pmatrix} \rho \\ u_1 \\ u_2 \\ p \end{pmatrix} = 0, \quad (22)$$

$$\check{A} = \begin{pmatrix} d_3 & \alpha_1 l_1 & \alpha_2 l_1 & m_2 \\ u_1 d_3 & \alpha_1(u_1 l_1 + \alpha_1 m_1) + m_4 & \alpha_2(u_1 l_1 + \alpha_1 m_1) & u_1 m_2 + \alpha_1 m_3 \\ u_2 d_3 & \alpha_1(u_2 l_1 + \alpha_2 m_1) & \alpha_2(u_2 l_1 + \alpha_2 m_1) + m_4 & u_2 m_2 + \alpha_2 m_3 \\ d_3(\tilde{e} - \frac{c^2}{\gamma-1}) & \alpha_1 l_2 + u_1 \rho d_3 & \alpha_2 l_2 + u_2 \rho d_3 & \tilde{e} m_2 + r_0 m_3 + \frac{d_3}{\gamma-1} \end{pmatrix}.$$

ただし,

$$d_1 = \frac{r_2 + r_1}{2}, \quad d_2 = \frac{r_2 - r_1}{2}, \quad d_3 = r_3, \quad m_1 = \frac{\rho(d_1 - d_3)}{\kappa^2}, \quad m_2 = \frac{d_1 - d_3}{c^2}, \quad m_3 = \frac{d_2}{c\kappa}, \quad m_4 = \rho d_3,$$

$$l_1 = \frac{\rho d_2}{c\kappa}, \quad l_2 = r_0 m_1 + \frac{\rho d_2 \tilde{e}}{c\kappa}, \quad \tilde{e} = \frac{u_1^2 + u_2^2}{2} + \frac{c^2}{\gamma-1}.$$

7 結論

Euler 方程式に対して真に多次元的な無反射境界条件とその実装法を提案し, Navier-Stokes 方程式へ拡張した. 本手法は, 特性曲線法に基づく局所的境界条件であり, 方程式だけからでは波の進む向きが決められない, という問題を, 数値計算時に保持しているデータを利用することによって進行方向を推定する, という方法で解決したものである. また, 数値実験上も Poincot-Lele の境界条件に比べ性能の改善が確認できた.

しかし, 他方, この手法によって境界上で反射が起らない, ということが完全に保証されたわけではない. 未解決な点も残されている. まず, 単純波という仮定である. 境界付近で解が単純波として振る舞う, という仮定を置いているが, 実際には必ずしもそうであるとは限らない. また, 単純波という仮定が成り立っていたとしても, 誤差のため, 推定されたパラメータは正確であるとは限らない. 特に, 推定する量は微分係数の比, という形をとっており誤差に対して非常に敏感である. パラメータの推定法については, 改善の余地があるであろう. これらは, 今後の課題として考えていかななくてはならない問題である.

謝辞: 研究を進める上で東京大学の室田一雄教授, お茶の水女子大学の金子晃教授, 名古屋大学の杉原正顯教授から貴重なご助言を頂いた. また, 本研究は 21 世紀 COE プログラム「情報科学技術戦略コア」および文部科学省科学研究費補助金基盤研究(S)の援助を受けている.

付録

実装法 2 を陽に計算すると, 提案した境界条件の実装アルゴリズムは以下ようになる.

無反射境界条件アルゴリズム

1. $\alpha_1 \leftarrow \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{(\frac{\partial u}{\partial x})_j}{(\frac{\partial u}{\partial y})_j}$, $\alpha_2 \leftarrow \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 \frac{(\frac{\partial u}{\partial y})_j}{(\frac{\partial u}{\partial x})_j}$
2. もし $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$ ならば終了する. そうでなければ 3 以降を行う.
3. もし $|\alpha_2| > |\alpha_1|$ ならば $|\alpha_2| \leftarrow 1$.
そうでなければ $|\alpha_1| \leftarrow 1$.
4. $\kappa \leftarrow \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}$, $r_0 \leftarrow \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2$,
 $r_1 \leftarrow r_0 - \kappa c$, $r_2 \leftarrow r_0 + \kappa c$, $r_3 \leftarrow r_0$.
5. $j = 1, 2, 3$ に対して, 表 2 のとおり対応する推定速度ベクトルが計算領域内向きならば

$$r_j \leftarrow 0.$$

表 2 固有値と速度の対応 (ロバストな実装の場合)

固有値	速度
r_1	$\frac{dx}{dt} = u_1 - \frac{\text{sign}(\alpha_1)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} C,$ $\frac{dy}{dt} = u_2 - \frac{\text{sign}(\alpha_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} C$
r_2	$\frac{dx}{dt} = u_1 + \frac{\text{sign}(\alpha_1)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} C,$ $\frac{dy}{dt} = u_2 + \frac{\text{sign}(\alpha_2)}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}} C$
r_3	$\frac{dx}{dt} = u_1, \frac{dy}{dt} = u_2$

6. u の値を更新式 (22) で更新する .

更新式中に r_0 の項が残っているが, これは r_3 と値は同じであるものの本質的には異なり, 波の向きによって 0 に置き換わることはないということに注意されたい .

引用文献

- 1) J. P. Berenger : A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves, *Journal of Computational Physics*, 114 (1994) 185–200.
- 2) C. H. Bruneau and E. Creuse: Towards a Transparent Boundary Condition for Compressible Navier-Stokes Equations, *International Journal for Numerical Methods in Fluids*, 36 (2001) 807–840.
- 3) T. Colonius: Modeling Artificial Boundary Conditions for Compressible Flow, *Annual Review of Fluid Mechanics*, 36 (2004) 315–345.
- 4) R. Courant and D. Hilbert: *Methods of Mathematical Physics*, vol. 2 (John Wiley and Sons, 1962) 430–431, 600–605.
- 5) P. Dutt: Stable Boundary Conditions and Difference Schemas for Navier-Stokes Equations, *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25 (1988) 245–267.
- 6) B. Engquist and A. Majda: Absorbing Boundary Conditions for the Numerical Simulation of

Waves, *Mathematics of Computation*, 31 (1977) 629–651.

- 7) D. Givoli: Non-Reflecting Boundary Conditions, *Journal of Computational Physics*, 91 (1991) 1–29.
- 8) G. W. Hedstrom: Nonreflecting Boundary Conditions for Nonlinear Hyperbolic Systems, *Journal of Computational Physics*, 30 (1979) 222–237.
- 9) A. Jeffrey and T. Taniuti: *Non-Linear Wave Propagation* (Academic Press , 1964) 65–91.
- 10) S. Lele: Compact Finite Difference Schemes with Spectral-Like Resolution, *Journal of Computational Physics*, 103 (1992) 16–42.
- 11) P. Luchini and R. Tognaccini: Direction-Adaptive Nonreflecting Boundary Conditions, *Journal of Computational Physics*, 128 (1996) 121–133.
- 12) T. J. Poinsot and S. K. Lele: Boundary Conditions for Direct Simulations of Compressible Viscous Flows , *Journal of Computational Physics*, 101 (1992) 104–129.
- 13) K. Mazaheri and P. Roe: Numerical Wave Propagation and Steady-State Solutions: Soft Wall and Outer Boundary Conditions, *AIAA Journal*, 36 (1997) 1–24.
- 14) S. Ta’asan and D. M. Nark: An Absorbing Buffer Zone Technique for Acoustic Wave Propagation, *AIAA Paper*, (1995) 95–146.
- 15) K. W. Thompson: Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems, *Journal of Computational Physics*, 68 (1987) 1–24.
- 16) K. W. Thompson: Time Dependent Boundary Conditions for Hyperbolic Systems II, *Journal of Computational Physics*, 89 (1990) 439–461.
- 17) S. V. Tsynkov: Numerical Solution of Problems on Unbounded Domains. A Review, *Applied Numerical Mathematics*, 27 (1998) 465–532.
- 18) F. ジョン著, 佐々木他訳 : 偏微分方程式 (シュプリンガー数学クラシックス, 2003) 11–67.