

〔特集〕 注目研究 in 年会 2013

Taylor-Green 流れにおける弾性乱流

*名古屋工業大学・大学院工学研究科・創成シミュレーション工学専攻

渡 邊 威†

名古屋工業大学・大学院工学研究科・創成シミュレーション工学専攻

後 藤 俊 幸††

Elastic turbulence in a Taylor-Green flow

TAKESHI WATANABE, Department of Scientific and Engineering Simulation, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Syowa-ku, Nagoya, 466-8555

TOSHIYUKI GOTOH, Department of Scientific and Engineering Simulation, Nagoya Institute of Technology, Gokiso-cho, Syowa-ku, Nagoya, 466-8555

1 はじめに

高分子溶液の流れにおいて、そのレイノルズ数は十分小さいにもかかわらず、高分子による強い弾性が不規則でランダムな流れを誘起することが知られている。これは“弾性乱流(Elastic Turbulence)”と呼ばれており¹⁾、近年多くの実験、数値シミュレーションによる研究が行われている²⁻¹¹⁾。弾性乱流においては、幅広い時間・空間スケールに渡って揺らぎが励起され、流れの運動エネルギースペクトルはべき則 $E(k) \propto k^{-\alpha}$ を示す。ここで指数 α の値は実験で $\alpha = 3.5^{1,8)}$ 、Oldroyd-B モデルを用いた Kolmogorov 流の直接数値計算 (DNS) で $\alpha = 3.8^{6,7)}$ が得られている。またこの時、速度勾配の揺らぎは非ガウス分布を示す。これらの性質は Newton 流体における強い乱流で観測されるものと類似していることが指摘されている⁸⁾。一方で Jun & Steinberg⁹⁾ による最近の実験では、圧力スペクトル $E_p(k)$ もべき則 $E_p(k) \propto k^{-\beta}$ に従う事が観測されており、指数 β の値は 3 に近い。さらに圧力揺らぎの分布関数もまた Newton 流体中の発達乱流で観測されるものと類似した非ガウス分布になることが示されている⁹⁾。

これまで我々は、減衰乱流の最終状態における高分子の影響について研究を行ってきた。溶媒の運動を Navier-Stokes(NS) 方程式で記述し、一方で個々の高分子鎖の運動は非線形バネを有するダンベルモデルを用いた、オイ

ラー・ラグランジュハイブリッド計算による数値シミュレーションを採用しているのが大きな特徴である。流れ場に非常に大多数のダンベルモデル (最大 10^{10} 個程度) を分散させ、流れ場と個々の高分子鎖のダイナミクスを連結した大規模並列計算を実行し、高分子が乱流に及ぼす影響を調べてきた¹²⁾。ワイゼンベルグ数 $Wi \equiv \tau/\tau_K$ (乱流の最小時間スケール (Kolmogorov 時間) τ_K と高分子鎖の緩和時間 τ の比) を変えて計算を行った結果、以下の事が明らかになった^{13,14)}。

- 1) 乱流の減衰最終過程において、大多数の高分子が十分に伸張した状態を維持している時、運動エネルギースペクトル $E(k, t)$ は Kolmogorov 長さ l_K より小さなスケールでべき則 $E(k, t) \propto k^{-\alpha}$ に従う。
- 2) 指数 α の値は 4.2 - 4.7 程度であり、 Wi の増大とともに減少する¹³⁾。
- 3) 圧力スペクトル $E_p(k, t)$ もエネルギースペクトルと同じ波数領域でべき則減衰 $E_p(k, t) \propto k^{-\beta}$ を示す。 β の値は 2.8 - 3.2 程度である。
- 4) 速度勾配、圧力場の揺らぎの分布関数はガウス分布からの若干のずれが見られる。

最も高い Wi 数の時の結果 $\alpha = 4.2$ は、弾性乱流の実験^{1,8)} および構成方程式の数値シミュレーション^{6,7)} で得られたものと比較すると、若干大きめであるが近い値を示している。また $\beta \simeq 3$ は実験で得られた値とよい一致を示している⁹⁾。しかし弾性乱流の特徴の一つである揺らぎの非ガウス性について、両者では振る舞いが異なる

*〒 466-8555 名古屋市昭和区御器所町

†E-mail: watanabe@nitech.ac.jp

††E-mail: gotoh.toshiyuki@nitech.ac.jp

ように思われる。これは減衰乱流中の乱れと、弾性乱流による乱れでは、揺らぎの生成メカニズムが異なる事が要因として考えられる。

本研究の目的は、これまでの研究で扱ってきたオイラー・ラグランジュ計算を用いて弾性乱流を実現し、その統計性質と高分子が減衰乱流に及ぼす影響を解析した結果^{13,14)}との類似点、相違点を明らかにすることにある。具体的には Taylor-Green 渦に比例する外力を NS 方程式に印加し、定常な渦流れを作る。この時、流れ場に高分子を分散すると定常流れは非定常化し、不規則な運動が生じることを示す。この時、スペクトルや速度勾配、圧力の定常分布関数の振る舞いを議論する。

以下2節では計算で扱うモデル方程式について簡単に紹介し、3節でその数値計算法とパラメータについて説明する。4節で1点統計量やスペクトル等の計算結果を示し、その特徴を議論する。5節では得られた結果と今後の展望について述べる。

2 基礎方程式

2.1 ダンベルモデル

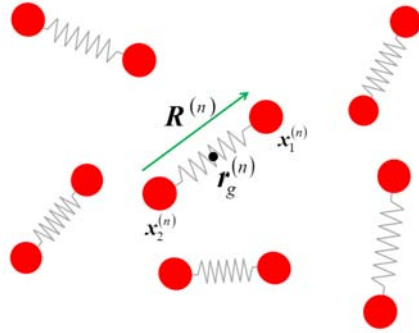


図1 ダンベルモデルの模式図

単一の高分子鎖を非線形バネで連結した二つの小球でモデル化する。これはダンベルモデルと呼ばれる¹⁵⁾(図1)。ここでは流体中の合計 N_t 個のダンベルモデルの集団運動を考える。希薄系を扱うので、異なるダンベルモデル間の相互作用は無視する。 n 番目のダンベルモデル ($n = 1, 2, \dots, N_t$) の運動方程式は次式で与えられる。

$$\frac{d\mathbf{R}^{(n)}}{dt} = \mathbf{u}_1^{(n)} - \mathbf{u}_2^{(n)} - \frac{1}{2\tau} f\left(\frac{|\mathbf{R}^{(n)}|}{L_{max}}\right) \mathbf{R}^{(n)} + \frac{r_{eq}}{\sqrt{2\tau}} \left(\mathbf{W}_1^{(n)} - \mathbf{W}_2^{(n)} \right), \quad (1)$$

$$\frac{d\mathbf{r}_g^{(n)}}{dt} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{u}_1^{(n)} + \mathbf{u}_2^{(n)} \right) + \frac{r_{eq}}{\sqrt{8\tau}} \left(\mathbf{W}_1^{(n)} + \mathbf{W}_2^{(n)} \right), \quad (2)$$

$$\mathbf{u}_\alpha^{(n)} \equiv \mathbf{u}(\mathbf{x}_\alpha^{(n)}(t), t). \quad (3)$$

ここで $\mathbf{R}^{(n)}(t)$ はダンベルの末端間ベクトル、 $\mathbf{r}_g^{(n)}(t)$ は重心ベクトルをそれぞれ表す(図1)。溶媒の速度場は $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ である。非線形バネとして、本研究では finitely extensible nonlinear elastic (FENE) モデル $f(z) = 1/(1 - z^2)$ を用いる^{15,16)}。式(1)において、 L_{max} はダンベルの最大伸び切り長を表す。また $\mathbf{W}_{1,2}^{(n)}(t)$ は溶媒中の粒子のブラウン運動によるランダム力を表し、

$$\langle \mathbf{W}_{\alpha,i}^{(n)}(t) \rangle = 0, \quad (4)$$

$$\langle \mathbf{W}_{\alpha,i}^{(n)}(t) \mathbf{W}_{\beta,j}^{(m)}(s) \rangle = \delta_{\alpha\beta} \delta_{ij} \delta_{nm} \delta(t - s), \quad (5)$$

のガウス統計に従う。ここで $\langle \dots \rangle$ はアンサンブル平均を表す。下付き文字 $\alpha, \beta, i, j, n, m$ はそれぞれ $(\alpha, \beta) = 1$ or 2 , $(i, j) = 1, 2, 3$, $(n, m) = 1, 2, \dots, N_t$ の値をとる。 δ_{ij} は Kronecker のデルタであり、 $\delta(t)$ は Dirac のデルタ関数である。定数 τ, r_{eq} はそれぞれ

$$\tau \equiv \frac{\zeta}{4k}; \quad r_{eq} \equiv \sqrt{\frac{k_B T}{k}}, \quad (6)$$

で定義され、溶媒中のダンベルの緩和時間と平衡長を表す。ここで k はバネ定数、 $\zeta \equiv 6\pi\nu_s\rho_s a$ はストークスの抵抗係数 (ρ_s は溶媒の密度、 a は粒子半径) である。 k_B と T はそれぞれボルツマン定数と温度を表す。

2.2 溶媒の基礎方程式

溶媒は非圧縮流体とすると、溶媒の運動は連続の式と NS 方程式に従う。

$$\nabla \cdot \mathbf{u} = 0, \quad (7)$$

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla p + \nu_s \nabla^2 \mathbf{u} + \nabla \cdot \mathbf{T}^p + \mathbf{f}. \quad (8)$$

ここで $p(\mathbf{x}, t)$ は圧力場であり、溶媒の密度 ρ_s は球の密度 ρ_d に等しく $\rho_s = \rho_d = 1$ に設定している。 $\mathbf{f}(\mathbf{x}, t)$ は流れを駆動する外力項であり、詳細は次節で述べる。高分子によるストレス場 $\mathbf{T}^p(\mathbf{x}, t)$ は次式で表される¹²⁾。

$$\mathbf{T}_{ij}^p(\mathbf{x}, t) = \frac{\nu_p}{\tau} \left(\frac{L_{box}^3}{N_t} \right) \sum_{n=1}^{N_t} t_{ij}^{(n)} \delta(\mathbf{x} - \mathbf{r}_g^{(n)}), \quad (9)$$

$$t_{ij}^{(n)} \equiv \frac{R_i^{(n)} R_j^{(n)}}{r_{eq}^2} f\left(\frac{|\mathbf{R}^{(n)}|}{L_{max}}\right) - \delta_{ij}. \quad (10)$$

ここで $\nu_p \equiv \nu_s \eta$ は高分子による粘度であり、定数 $\eta \equiv (3r_{eq}/4a)^2 \Phi_V$ はゼロ剪断粘度比を表す。 $\Phi_V \equiv (8\pi N_t/3)(a/L_{box})^3$ はダンベル集団の体積分率である。

2.3 Taylor-Green 流れ

Taylor-Green 流れとは、Taylor-Green 渦

$$u_1^{TG} = \cos x_1 \sin x_2 \cos x_3, \quad (11)$$

$$u_2^{TG} = -\sin x_1 \cos x_2 \cos x_3, \quad (12)$$

$$u_3^{TG} = 0 \quad (13)$$

に比例する外力により引き起こされる流れの事を示す。この流れ場は双曲型及び楕円型の淀み点の両方を有することが特徴の一つである(図3)。双曲型淀み点近傍においては、高分子は強く伸張する事が期待出来るため¹⁷⁾、高分子が流れ場に及ぼす影響を調べるのに適している。また他の興味深い点として、2枚の回転する円盤内に挟まれた流体に生じる流れ場(von Kármán流れ)との類似性が挙げられる¹⁸⁾。この流れ場における弾性乱流の実験研究が行われており⁸⁾、実験結果と本研究の結果を比較することは興味深い。

Taylor-Green 流れを実現する外力として、

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, t) = A(t)\mathbf{u}^{TG}(\mathbf{x}) \quad (14)$$

を用いた。ここで振幅 $A(t)$ は時間に依存する。 $A(t)$ の定義の仕方には色々考えられ、例えば外力を印加するモードの速度場のフーリエ係数の振幅が一定になるように決める方法¹⁸⁾がある。本研究ではこれとは異なり、エネルギー注入率 $\varepsilon_{in} = \langle \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} \rangle_V$ が時間によらず一定となるような条件により決定した¹⁹⁾。ここで $\langle \dots \rangle_V$ は計算領域全体に渡る体積平均を表す。即ち $A(t)$ は

$$A(t) = \frac{\varepsilon_{in}}{\langle \mathbf{u}^{TG} \cdot \mathbf{u} \rangle_V} \quad (15)$$

で定義される。

3 数値計算法

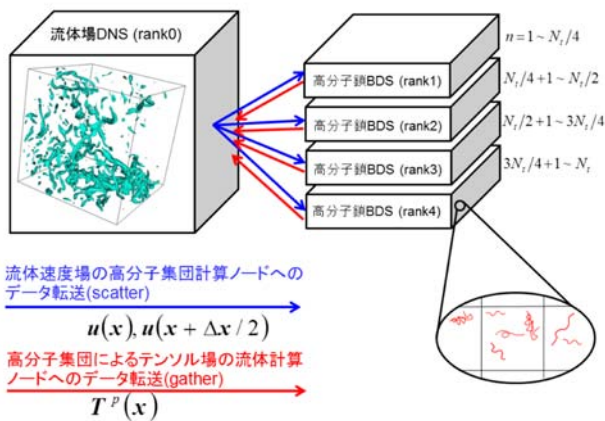


図2 流体(オイラー)と高分子集団(ラグランジュ)の相互作用のハイブリッドシミュレーションにおける並列計算法の模式図

本節では式(1)-(15)の数値計算について簡単に説明する。計算領域は一辺が $L_{box} = 2\pi$ の立方体とし、周期境界条件に従う。NS式の離散化にはスペクトル法を用い、時間積分には2次ルンゲ・クッタ法を用いた。計算領域

を 128^3 の格子点を用いて離散化し、扱うダンベルの総数は $N_{comp} = N_t/b = 5.04 \times 10^8$ に設定した。ここで b は一つのダンベルに対する仮想的なダンベルのコピーの総数を表す。これは実際に必要とされる高分子の総数 $N_t = O(10^{13})$ が非常に巨大であるため、計算コストの削減のために導入された¹²⁾。本研究では $b = 5.675 \times 10^3$ とした。この時、 $\Phi_V = 1.0 \times 10^{-4}$ 、 $\eta = 0.1063$ であった。またエネルギー注入率は $\varepsilon_{in} = 0.5$ に固定した。

初期速度場はガウス統計に従うランダムな非圧縮場を与える。但しそのエネルギースペクトルは $E(k, 0) \propto k^4 \exp(-ck^2)$ に従うように振幅を決定した。ダンベル集団は、初期に計算領域内に一様に分布させる。この時の各ダンベルの末端間ベクトルは、 $\mathbf{R}^{(n)}(0) = \sqrt{3}r_{eq}\hat{\mathbf{n}}^{(n)}$ で与える。ここで $\hat{\mathbf{n}}^{(n)}$ は一様乱数により作られるランダムな成分を持つ単位ベクトルである。

非常に大多数のダンベルモデルの移流と変形を計算するため、効率的な並列計算を行う必要がある。並列化は図2に示す様に、ダンベルの総数をいくつかのノードに分割して割り当て、各ノードで独立にダンベル集団の時間発展を計算する。この際、速度場の情報が必要になる。流体場は一つのノードで計算し、このノードとその他のノードとの間で速度場、およびポリマーストレス場のデータを送受信しながら計算を行う(図2)¹³⁾。ノード間のデータ通信は Message Passing Interface (MPI) を用いてコーディングを行い、ノード内のスレッド並列については、単純なループ構造の箇所は自動並列化機能を用いて、また複雑なループ構造を持つ箇所は Open MP を用いてそれぞれ並列化した。ビーズ位置における流速は、TS13スキーム²⁰⁾を用いて補間により求めた。またポリマーストレス項の計算では、式(9)の中にあるデルタ関数を近似的に扱う必要がある。ここでは線形補間で用いられる重み関数

$$\delta_\Delta(\mathbf{x}) = d_\Delta(x_1)d_\Delta(x_2)d_\Delta(x_3), \quad (16)$$

$$d_\Delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{\Delta} \left(1 - \frac{|x|}{\Delta}\right) & (|x| \leq \Delta) \\ 0 & (|x| > \Delta) \end{cases} \quad (17)$$

を用いて近似した。ここで Δ は格子間隔にとった、これは重心点における局所的なポリマーストレスを、まわりの8個の格子点に重みをつけて分配することを意味する²¹⁾。本研究では通常の格子点へ分配したものと、半格子点ずれた場合へ分配したものを相加平均してストレス場を求めることで、計算精度の向上を試みた¹⁴⁾。その他パラメータ設定方法についての詳細は、Watanabe & Gotoh (2013)¹²⁾を参照されたい。

本研究では、2ケースの W_i 数について計算を行った。この時の W_i は $W_i \equiv \tau(\varepsilon_{in}/\nu_s)^{1/2}$ で定義される。他の

表1 Taylor-Green 流れの直接数値計算とダンベル集団のブラウン動力学計算における計算パラメータ及び基本統計量を示す。 $\bar{R}_\lambda, \bar{E}, \bar{\varepsilon}, \bar{\varepsilon}_p$ は $126 \leq t/T_e \leq 170$ に渡って時間平均した値を示している。

Run	τ	W_i	\bar{R}_λ	\bar{E}	$\bar{\varepsilon}$	$\bar{\varepsilon}_p$
F1	5.48	10	1.97	0.137	0.214	0.286
F2	11.0	20	2.06	0.150	0.234	0.266

計算条件は両者では完全に一致している。計算パラメータ、統計量についてまとめたものを表1に示す。

4 結果と考察

4.1 Taylor-Green 流れの構造

最初に系に高分子を分散させずに定常な渦流れを実現した ($0 \leq t/T_e < 22$)。ここで T_e は巨視的代表時間であり、Taylor-Green 渦の空間周期 $L = \pi$ と ε_{in} を用いて $T_e = (L^2/\varepsilon_{in})^{1/3}$ で定義した。初期値より $6T_e$ 程経過後、系の運動エネルギーなどの一点統計量はすべてある定数に収束し、流れ場は定常状態になった。この時の流れ場の様子を図3に示す。この可視化図より、流れ場は規則正しい渦構造が領域内に周期的に配置され、流線は渦構造の周囲を円状に取り囲んでいることがわかる。また双曲型と楕円型の淀み点が存在している事が確認できる。この定常流れ場は Taylor-Green 渦の流れ場 (式(11)–(13)) と似た構造を有するが、詳細は一致しないことに注意したい。

4.2 一点統計量の時間発展

図4に運動エネルギー $E(t) = \langle \mathbf{u}^2 \rangle_V / 2$ の時間変化の様子を示す。 $t/T_e = 22$ でダンベル集団を系に一樣に分散させると、流れ場の運動エネルギーは急激に減少し、不規則な時間変化を示す。図4(b)より、時間変化の様子は W_i の値によって差異があるが、振動の振幅は小さく、また短い周期と長い周期が混在している事がわかる。

$E(t)$ の時間発展方程式は、

$$\frac{dE(t)}{dt} = -\varepsilon(t) - \varepsilon_p(t) + \varepsilon_{in} \quad (18)$$

である。ここで右辺第1項は平均エネルギー散逸率 $\varepsilon(t) = \nu_s \langle (\nabla \mathbf{u})^2 \rangle_V$ 、第2項は高分子によるエネルギー輸送への寄与を表し、歪み速度テンソル \mathbf{S} を用いて $\varepsilon_p(t) = \langle \mathbf{S} : \mathbf{T}^p \rangle_V$ で定義される。図5に $\varepsilon(t), \varepsilon_p(t)$ の時間変化の様子をそれぞれ示す。高分子の影響がなく、系が定常状態にあれば $\varepsilon(t) = \varepsilon_{in}$ となる。図5では $7.4 \leq t/T_e \leq 22$ でこれが観測される。ダンベル集団を分散した $t/T_e = 22$ 以降では、 $E(t)$ と同様に $\varepsilon(t)$ は急速に減少し、不規則な

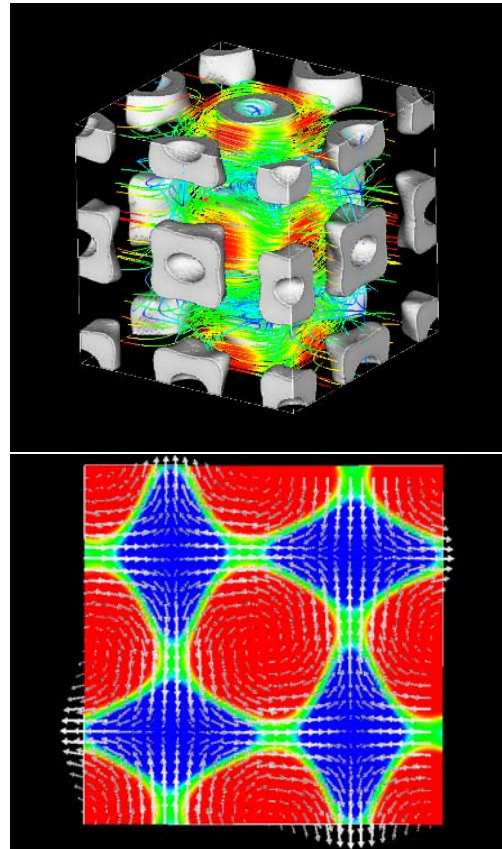


図3 上段：渦度の大きさの等値面図及び流線を表す。下段： $x_1 - x_2$ 面 ($x_3 = 0$) における速度勾配テンソルの第2不変量 Q のコンター図及び速度ベクトルを示す。それぞれ Run F1 の $t/T_e = 22$ における結果を可視化したものである。

振動を始める。一方で $\varepsilon_p(t)$ は増大し、一定値の周りで不規則に振動するようになる。これはダンベル集団によりエネルギー散逸の一部が担われるようになったことを意味する。またエネルギー注入率が一定であるため、表1より、 $\varepsilon_{in} = \bar{\varepsilon} + \bar{\varepsilon}_p$ が成り立つことが確認できる。

図6に無次元化されたエンストロフィー生成項とテイラーマイクロスケールレイノルズ数

$$-S(t) = \frac{6\sqrt{15} \langle \boldsymbol{\omega} \cdot (\boldsymbol{\omega} \cdot \nabla \mathbf{u}) \rangle_V}{7 \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle_V^{3/2}}, \quad (19)$$

$$R_\lambda(t) = \sqrt{\frac{20}{3\nu_s \varepsilon(t)}} E(t), \quad (20)$$

の時間発展の様子をそれぞれ示す。もし場が等方的であれば、 $S(t)$ は縦速度微分の skewness に一致する。図より、ダンベル集団を分散する前に $-S(t)$ は正の一定値を示している。これは渦度伸張項、散逸項および外力項がバランスして定常な渦流れが実現されていることを意味し、NS 式の慣性項が重要な役割を果たしていることにな

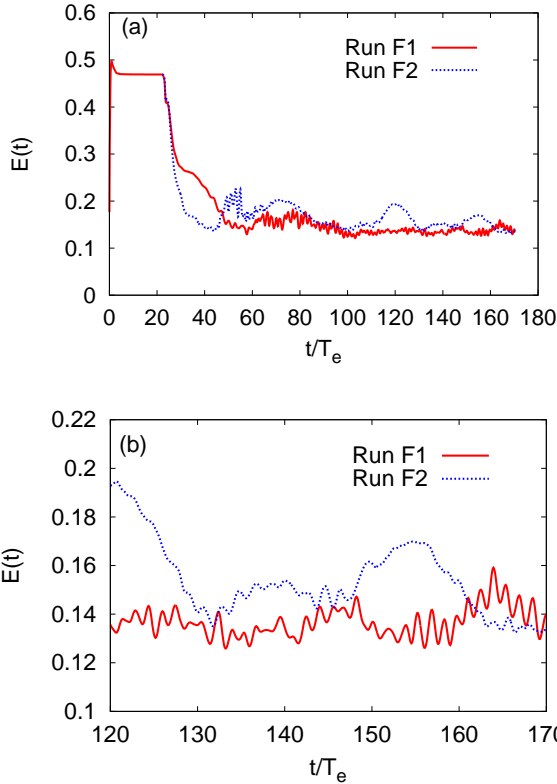


図4 流体の体積平均運動エネルギーの時間変化の様子を示す。(a) 全計算時間に渡る振る舞い。(b) (a)において $120 \leq t/T_e \leq 170$ の時間領域を拡大した図。

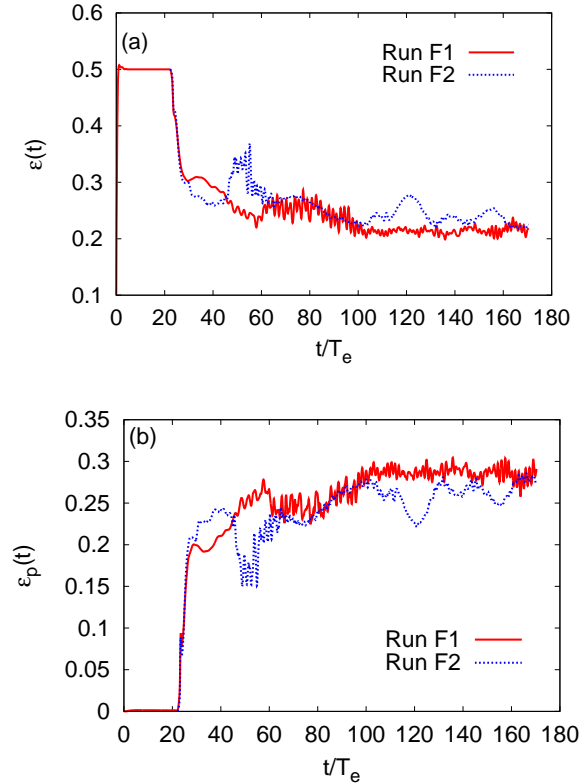


図5 (a) 運動エネルギー散逸率 $\epsilon(t)$, 及び (b) 運動エネルギーの時間発展における高分子の寄与項 $\epsilon_p(t)$ の時間変化の様子をそれぞれ示す。

る。この点は外力場として Kolmogorov 流を用いた DNS 研究^{6,7)}とは状況が異なっている。ダンベル集団を分散後、 $-S(t)$ は急激に減少することがわかる。即ち、高分子により渦度生成が抑制されることになる。 $R_\lambda(t)$ も同様に減少し、 $R_\lambda = 2$ 程度で不規則に振動している。よって、系のレイノルズ数は十分小さく、 $-S(t)$ も小さな値をとることから、ダンベル分散後の乱流状態において NS 式の慣性項の寄与は大きくないことが推察される。

4.3 スペクトルの振る舞い

次に、十分な時間経過後に統計的に定常状態になったと見なして、 $126 \leq t/T_e \leq 170$ においてエネルギー散逸スペクトル $D(k) = 2\nu_s k^2 E(k)$ 及び圧力分散スペクトル $E_p(k)$ の時間平均値を求めた。結果を図7に示す。この結果より、 $D(k), E_p(k)$ 共に $2 < kl_K < 5$ の範囲でべき則に近い振る舞いを示す領域が存在することが確認できる。またわずかにではあるが、Run F2の方がRun F1に比べてスペクトルのスロープが緩やかである。

スペクトルのスケージング則について詳細を調べるため、 $k^\alpha E(k), k^\beta E_p(k)$ の振る舞いを調べた。ここで α, β はべき則が成り立つ領域がフラットになるように値を定めた。結果を図8に示す。この結果より、Run F1, F2 そ

れぞれに対し $\alpha = 4.6, 4.5$ の時に平坦な領域が存在することがわかる。ただしその領域はかなり狭い。これは非常に明確なスケージング領域が存在した減衰乱流による結果¹³⁾とは対照的である。指数の値を見ると、弾性乱流の実験および構成方程式の DNS 研究で得られた値に比べて若干大きい。指数の値はむしろ減衰乱流で得られた結果 ($\alpha = 4.2 - 4.6$)¹³⁾とよく一致している。一方で圧力分散スペクトルの振る舞いを見ると、比較的明確なスケージング領域が存在していることがわかる。指数の値は $\beta = 3.5, 3.4$ 程度であり、これも減衰乱流による結果に近い¹³⁾。さらに α, β の値は共に W_i の増加と共にわずかではあるが減少する傾向にある。この傾向も減衰乱流による結果¹³⁾と一致している。

4.4 確率密度関数の振る舞い

次に速度勾配及び圧力の揺らぎの確率密度関数 (PDF) の振る舞いを議論する。PDF は、スペクトルと同様に統計的に定常と見なせる時間領域に渡って時間平均をとって求めた。縦速度微分、横速度微分、圧力のそれぞれの PDF の振る舞いを図9に示す。ここで速度微分については、 x_3 方向と x_1, x_2 方向での場の非等方性を考慮して、速度微分の成分を分けて求めた。

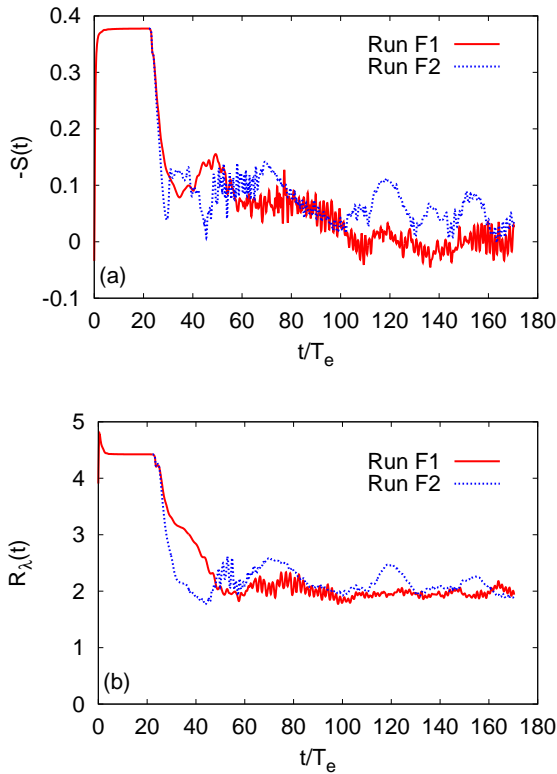


図6 (a)無次元化した渦度生成項 $-S(t)$ 及び (b) テイラーマイクロスケールレイノルズ数 $R_\lambda(t)$ の時間変化の様子をそれぞれ示す。

縦速度微分の結果を見ると, $\partial_1 u_1$ の揺らぎはガウス分布に非常に近いことがわかる一方, $\partial_3 u_3$ は左右歪んだ関数形になっており, ガウス分布からずれた指数型の分布になっていることがわかる. 本研究で扱っている系は場の非等方性が強く, 流れ場は $x_1 - x_2$ 面での2次元的な運動が支配的である. この非等方性がPDFの振る舞いに顕著に現れていると考えられる. 横速度微分については, 各成分の振る舞いに差異が見られるものの, ガウス分布からのずれが顕著であり, 振る舞いは弾性乱流の実験で得られているような指数分布に近い⁸⁾.

圧力揺らぎのPDFは, 値が正の領域において指数関数型の裾を有していることがわかる. これは弾性乱流の実験によるもの⁹⁾や, 高 Wi_i 数の減衰乱流における結果¹⁴⁾のどちらにおいても観測されていない. 圧力場が従うポアソン方程式のソース項は, ダンベル集団が強く伸張するようになるとポリマーストレステンソルによる項が支配的になる^{5,14)}. PDFの振る舞いの違いは, ポリマーストレス場の構造の差異に起因するものと考えられるが, 実際どのような違いが生じているかについては現段階ではわからない.

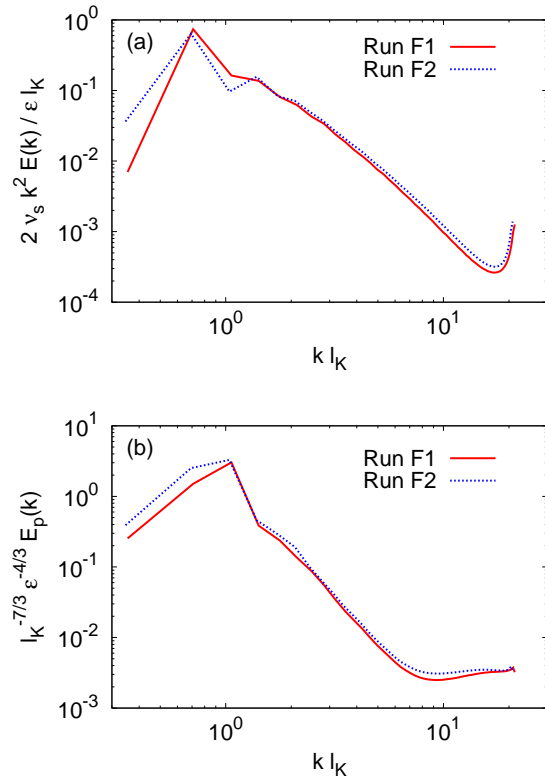


図7 時間平均をとった (a) 散逸スペクトル $2\nu_s k^2 E(k)$ 及び (b) 圧力分散スペクトル $E_p(k)$ をそれぞれ示す. 縦, 横軸共に Kolmogorov スケールを用いて無次元化している.

4.5 弾性乱流の流れ場の構造

最後に, 流れ場の構造について議論する. 図10は, Run F1においてダンベル集団を分散後, $t/T_e = 170$ における渦度場および流線の構造, 及び $x_3 = 0$ 面における速度ベクトルの様子を可視化したものである. ダンベル集団を分散して流れ場が不規則に時間変化するようになると, Taylor-Green 流れに特徴的な渦構造の一部は消滅している. また流線も複雑に曲がった構造になり, 流れ場が乱流化していることがわかる. 実際に時間変化の様子を観測すると, 初期の渦構造が位置を微妙に変化させながらランダムに変動し, 時間経過と共に初期の渦構造は消滅し, 流れ場全体が不規則に変動しながら乱流化する事がわかった.

5 まとめ

本研究では, オイラー・ラグランジュハイブリッド並列計算を実行し, 定常な Taylor-Green 流れに多数の高分子モデルを分散させた際に非定常な不規則運動が出現することを見いだした. 流れ場のレイノルズ数は非常に小さいにもかかわらず, ダンベルが強く伸張すると流れ場は不安定化し, 場は乱流化することが確認された. これは近年活発に研究が進められている弾性乱流の出現

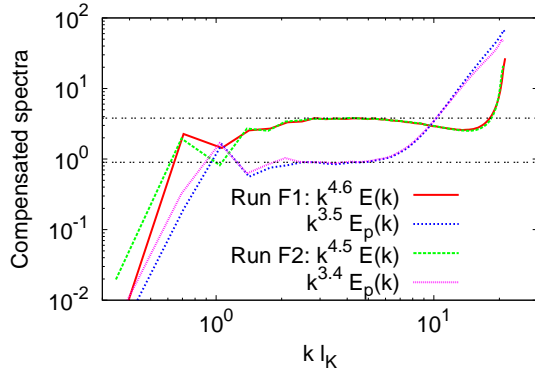


図8 図7を $k^\alpha E(k)$ 及び $k^\beta E_p(k)$ でプロットし直した図を示す. Run F1 に対しては, $\alpha = 4.6, \beta = 3.5$ また Run F2 に対しては $\alpha = 4.5, \beta = 3.4$ をそれぞれ用いている.

であると我々は解釈している. 実際にエネルギースペクトルや圧力分散スペクトルは特徴的なべき則を示し, べき指数の値は弾性乱流によるものや, 減衰乱流において得られた結果とは大きく異なることがわかった. さらに速度勾配や圧力場の PDF は非ガウス揺らぎを示し, この点においても過去の弾性乱流の結果と同様であることがわかった.

今後の課題として以下の点を挙げる.

本研究で観測されたエネルギースペクトルは, べき則を示す波数領域が狭く, べき指数の値を調べるのが困難であった. これは高 W_i 数の減衰乱流の結果¹³⁾ とは対照的である. スケーリング領域の狭さの要因として, エネルギー注入スケールとべき則が成り立つスケールが非常に近いことが考えられる. 例えば注入スケールをより大きくした計算を行うなどして, その影響を検証する必要がある. またべき指数の値は, 先行研究の弾性乱流のものより若干大きい傾向になった. 指数の値が W_i やダンベルの数密度, 溶媒の動粘度 ν_s にどのように依存するか, より詳細な解析が必要であると考える.

本研究では2ケースの W_i 数の結果を示したが, 乱流に遷移する特徴的な W_i 数を調べることは興味深い. 本研究で扱った定常な Taylor-Green 流れにおける歪み速度テンソル S の最大固有値 λ_1 の空間平均値は, $\langle \lambda_1 \rangle = 0.734$ であった. よって $\langle \lambda_1 \rangle \tau_s = 1$ を満たす τ_s の値の時に, 高分子はコイル-ストレッチ転移を示すと見積もられる. この時 $W_i \simeq 2.5$ であり, この近傍で流れ場の性質が大きく変化することが予想される. これは等方乱流中の高分子鎖のコイル-ストレッチ転移点 $W_i = 3 \sim 4$ に近い¹⁷⁾. 数値計算でこれを検証することは今後の課題である.

さらに, 本研究で得られた弾性乱流の乱流特性を, Newton 流体における乱流と比較することは重要であろう. 例えば流体粒子の相対拡散や, 各種物理量のラグランジュ

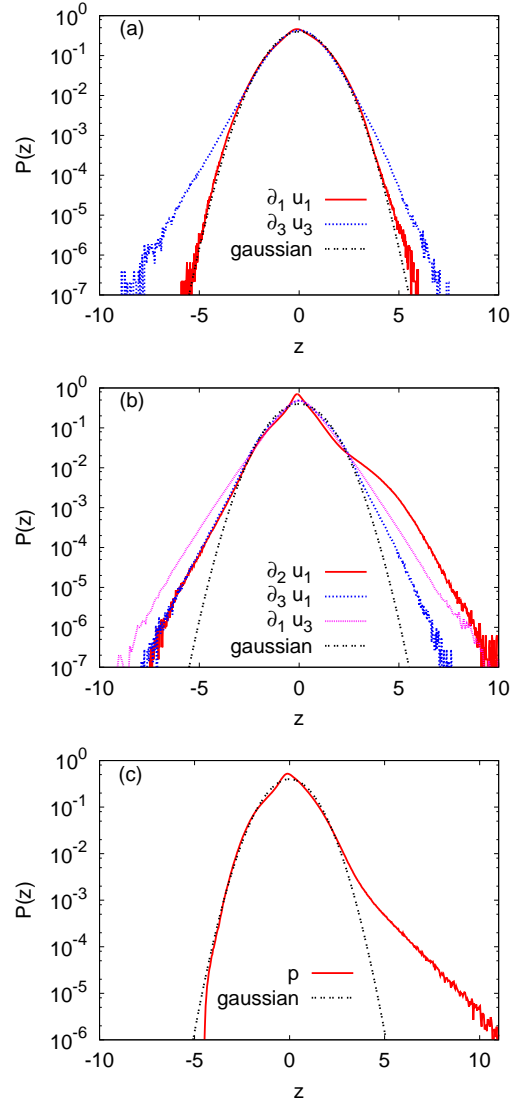


図9 確率密度関数 (PDF) の振る舞いを示す. それぞれ (a) 縦速度微分, (b) 横速度微分, (c) 圧力の空間・時間揺らぎから求めており, 各 PDF は正規化してプロットしている.

時間相関の性質を調べることで, 弾性乱流の輸送・混合能力を定量的に評価し, Newton 流体のそれと比較してみることが挙げられる.

謝辞

本研究は科学研究費補助金 (課題番号 23760156, 24360068) の援助を受けて行われた. また, 核融合科学研究所, 及び名古屋大学情報基盤センター (JHPCN, HPC) に計算機資源を提供して頂いた. ここに記して感謝の意を表す.

引用文献

1) Groisman, A. & Steinberg, V. : Elastic turbulence in a polymer solution flow, Nature **405** (2000) 53–55.

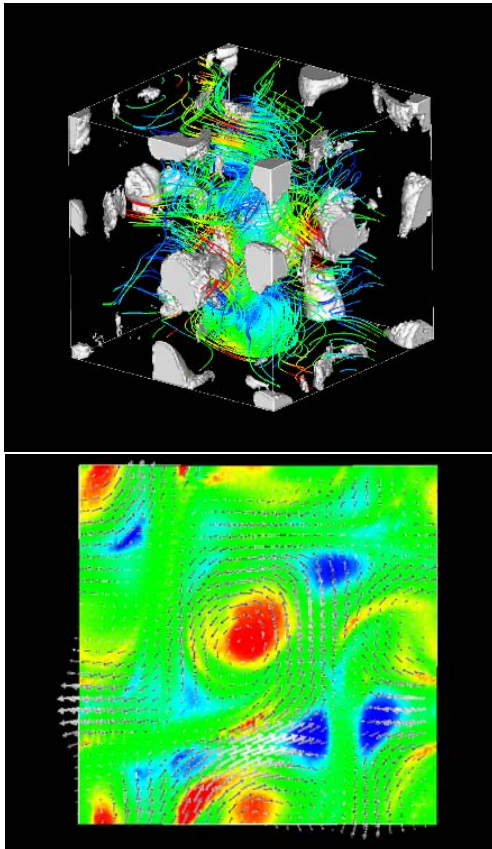


図 10 上段：渦度の大きさの等値面図及び流線を表す。下段： $x_1 - x_2$ 面 ($x_3 = 0$) における速度勾配テンソルの第 2 不変量 Q のコンター図及び速度ベクトルを示す。それぞれ Run F1 の $t/T_e = 170$ における結果を可視化したものである。

- 2) Groisman, A. & Steinberg, V. : Efficient mixing at low Reynolds numbers using polymer additives, *Nature* **410** (2001) 905–908.
- 3) Burghelea, T., Segre, E. & Steinberg, V. : Mixing by polymers: Experimental test of decay regime of mixing, *Phys. Rev. Lett.* **92** (2004) 164501.
- 4) Arratia, P. E., Thomas, C. C., Diorio, J. & Gollub, J. P. : Elastic instabilities of polymer solutions in cross-channel flow, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 144502.
- 5) Burghelea, T., Segre, E. & Steinberg, V. : Role of elastic stress in statistical and scaling properties of elastic turbulence, *Phys. Rev. Lett.* **96** (2006) 214502.
- 6) Berti, S., Bistagnino, A., Boffetta, G., Celani, A. & Musacchio, S. : Two-dimensional elastic turbulence, *Phys. Rev. E* **77** (2008) 055306.
- 7) Berti, S. & Boffetta, G. : Elastic waves and transition to elastic turbulence in a two-dimensional viscoelastic Kolmogorov flow, *Phys. Rev. E* **82** (2010) 036314.
- 8) Groisman, A. & Steinberg, V. : Elastic turbulence in curvilinear flows of polymer solutions, *New J. Phys.* **6** (2004) 29.
- 9) Jun, Y. & Steinberg, V. : Power and pressure fluctuations in elastic turbulence over a wide range of polymer concentrations, *Phys. Rev. Lett.* **102** (2009) 124503.
- 10) Fouxon, A. & Lebedev, V. : Spectra of turbulence in dilute polymer solutions, *Phys. Fluids* **15** (2003) 2060–2073.
- 11) Boffetta, G., Celani, A., Mazzino, A., Puliafito, A. & Vergassola, M. : The viscoelastic Kolmogorov flow: eddy viscosity and linear stability, *J. Fluid Mech.* **523** (2005) 161–170.
- 12) Watanabe, T. & Gotoh, T. : Hybrid Eulerian-Lagrangian simulations for polymer-turbulence interactions, *J. Fluid Mech.* **717** (2013) 535–575.
- 13) Watanabe, T. & Gotoh, T. : Kinetic energy spectrum of low-Reynolds-number turbulence with polymer additives, *J. Phys. : Conf. Ser.* **454** (2013) 012007.
- 14) Watanabe, T. & Gotoh, T. : Power-law spectra formed by stretching polymers in decaying isotropic turbulence, submitted to *Phys. Fluids* (2013).
- 15) Bird, R. B., Curtiss, C. F., Armstrong, R. C. & Hassager, O. : *Dynamics of Polymeric Liquids, Vol.2 Kinetic Theory, 2nd ed.* (Wiley, New York, 1987).
- 16) Doi, M. & Edwards, S. F. : *The Theory of Polymer Dynamics* (Oxford University Press, New York, 1986).
- 17) Watanabe, T. & Gotoh, T. : Coil-stretch transition in an ensemble of polymers in isotropic turbulence, *Phys. Rev. E* **81** (2010) 066301.
- 18) Dubrulle, B., Blaineau, P., Lopes, O. Mafra, Daviaud, F., Laval, J-P, & Dolganov, R. : Bifurcations and dynamo action in a Taylor-Green flow. *New J. Phys.* **9** (2007) 308.
- 19) Schumacker, J., Sreenivasan, K. R. & Yakhot, V. : Asymptotic exponents from low-Reynolds-number flows, *New J. Phys.* **9** (2007) 89.
- 20) Yeung, P. K. & Pope, S. B. : An algorithm for tracking fluid particles in numerical simulations of homogeneous turbulence, *J. Comp. Phys* **79** (1988) 373–416.
- 21) Squires, K. : Point-particle methods for disperse flows, in *Computational Methods for Multiphase Flow*, edited by Prosperetti, A. & Tryggvason G. (Cambridge University Press, Cambridge, 2007).