〔竜門賞受賞記念解説〕

数値流体力学と実験流体力学の融合による噴流の不安定波と放射音の研究：最小二乗法の応用

＊ 音響・流体力学技術分門，ボーイング社　　鈴 木 崇 夫†

Study on Instability Waves and Sound Generation in a Jet with an Approach Integrating Computational and Experimental Fluid Dynamics: Applications of Least-Squares Optimization

Takao SUZUKI, Acoustics and Fluid Mechanics, The Boeing Company

1 はじめに

この度、竜門賞を賜り光栄に存じます。推薦いただいた首都大学の淺井雅人教授には大変感謝しております. また選考委員の方々にも御礼申し上げます.

選考対象となった論文は，噴流の不安定性とそれに起因する空力音響に関連する三編 [1-3] ですが，各論と総説 [4]はそれぞれの論文に委ねるとし，本編ではこれらの研究の様々な用途で応用した非定常流体・音響現象の同定法について解説したいと思います．特に，今後流体力学の広い分野で応用が期待される最小二乗法の原理を用いた手法を紹介します.

2 非定常流体力学と最小二乗問題

対象となる現実の流体現象が複雑になるにつれ，既存の厳密解との比較や，直接解法を元にした解析は難しくなります．特に実験で観測できる物理量は限られ，ノイズを含むため，これらのデータから特定の流体現象を抽出する技術の良し悪しが，適用可能な解析手法の範囲を決定付けます．不安定性や音響に関する流体現象では，準周期的な運動でも周期ごとの揺らぎが大きいことを前提に現象を定量的に記述する必要があります.

そこで有効となるのが広義な意味での同定法や相関法，逆問題の解法といった手法ですが，誤差を含む現象の解析に最も幅広く用いられる方法が最小二乗法です．抽出したい流体現象をパラメータ（例えば振幅や位相など）を含む形で定式化し，そのモデルが m 番目の観測点でとる物理量 $p_m(a)$（a は最適化するパラメータを示す）と，実際に m 番目の観測点で測定される値 q_m との差の二乗和

$$J_2(a) \equiv \sum_{m=1}^{N_{mic}} \left| p_m(a) - q_m \right|^2, \tag{1}$$

を定義します．ここ N_{mic} は観測点の数を表します（以下でマイクロフォンの数とみなす）. この評価関数を最適化するよう

$$\frac{\partial J_2}{\partial a} = 0, \tag{2}$$

を何らかの解法で解くことで，データ内でのとる a の値を定量化できます．モデルを複数のパラメータで定式化する場合も，式(2)を連立方程式として解くことにより, 最適化するパラメータを計算できます.

2.1 音源探査法

上記の最小二乗法を基にした音響解析の手法に Beam-forming 法 [5,6]があります. 多数のマイクロフォンを遠方に配置し，音圧履歴を同次計測したデータから，音源の位置と強度を探査する方法です．測定値として m 番目のマイクロフォンで計測した圧力履歴を時間に関してフーリエ変換した複素振幅値を $\hat{q}_m$ と定義します. 抽出するモデルとしては一般的に単音源を想定し，その圧力振幅 a を複素数値をとるパラメータとして

*P.O. Box 3707, M/C 0R-JF, Seattle, WA 98124-2207, USA
† E-mail: takao.seattle@gmail.com

$$p_m(a,\mathbf{x}_s) = a\,\hat{p}(\mathbf{x}_s;\mathbf{x}_m) \equiv \frac{a}{4\pi|\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s|}\exp\left[-i\mathbf{k}\cdot(\mathbf{x}_m - \mathbf{x}_s)\right], \quad (3)$$

と表します．ここで $\mathbf{x}_s$ は音源位置，$\mathbf{x}_m$ は m 番目のマイクロフォンの位置, $\mathbf{k}$ は波数ベクトルとします．式(3)を式(1)に代入し，式(2)の通り微分することで，各 $\mathbf{x}_s$ に対して J_2 を最小とする a^* が得られます．

一方, 測定値 $\hat{q}_m$ は抽出するモデルの値によらないことから，$\hat{q}_m$ と $\hat{p}_m(\mathbf{x}_s;\mathbf{x}_m)$ をベクトル形式で記し

$$Q(\mathbf{x}_s) \equiv \sum_m^{N_{mic}} |\hat{q}_m|^2 - J_2(a^*) = \frac{\hat{\mathbf{p}}^\dagger}{|\hat{\mathbf{p}}|}\cdot\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^\dagger\cdot\frac{\hat{\mathbf{p}}}{|\hat{\mathbf{p}}|}, \quad (4)$$

が最大となる $\mathbf{x}_s$ を探すことで, 音源が存在する確率が最も高い位置とその振幅 a^*を同時に推定できます．音源探査の場合，$\mathbf{x}_s$ をパラメータとみなし連立方程式を解くと，検査面上のグリッド数だけ方程式が必要となるため，通常，各点で最大化した Q を等高線図で描き音源マップとみなします．一般に線形の音響現象は，モデルが最適化するパラメータの線形関数で表されるため，直接パラメータの値を計算できる利点があります．

式(4)では，測定値で構成される行列 $\hat{\mathbf{q}}\hat{\mathbf{q}}^\dagger$ は（一般に多くの時間区間での平均を取ったものを Cross spectral matrix と呼ぶ）すべてのマイク間での相関を網羅し，これと基本解を規格化してベクトル表記した $\hat{\mathbf{p}}/|\hat{\mathbf{p}}|$ （Steering vector と呼ぶ）との積が，各点の出力となります．これらの行列・ベクトルは複素数値をとるので, 測定値 $\hat{\mathbf{q}}^\dagger$ とモデル $\hat{\mathbf{p}}$ が複素共役の関係をとると，出力値がおおよそ最大になります．物理的には，データが持つ遅延時間とモデルのそれが一致したときに出力が最大になると解釈できます．

同様の原理は，広く流体力学・音響学に応用可能です．噴流の不安定波を解析した論文[2]では，式(3)で単音源に代わり線形不安定性解析で得られる Kelvin-Helmholtz 波の解を代入することで，その振幅が検出できることを実証しています．その他の例[7]では, 渦の循環など圧力に非線形な物理量も, 式(2)を反復解法で解き，最適解を計算できます．このように抽出対象の流体現象が定式化できる場合は，式(1)のような評価関数を最適化する手法が有効です．

2.2 Proper Orthogonal Decomposition

一方，対象となる流体現象が定式化できない場合は，差し当たって流れ場を支配する運動を抽出することが可能です[8]．複数点で観測した物理量を $\mathbf{q}_i$ とベクトル表記し（この場合添え字は i 番目のサンプルデータを示す）, これらの観測量を代表するベクトルをその振幅を除いて単位ベクトル $\tilde{\mathbf{p}}$ とします．この場合，評価関数を以下のとおり定義します：

$$\tilde{J}_2(\mathbf{p}) \equiv \sum_{i=1}^{N_{samp}} \left|\mathbf{q}_i - (\tilde{\mathbf{p}}^\dagger\cdot\mathbf{q}_i)\tilde{\mathbf{p}}\right|^2 = \sum_{i=1}^{N_{samp}}\left[|\mathbf{q}_i|^2 - |\mathbf{q}_i^\dagger\cdot\tilde{\mathbf{p}}|^2\right]. \quad (5)$$

上式の総和 N_{samp} は，すでに観測点をベクトル表記しているため，ここではサンプル数と考えます．

式(4)の場合と同様, 式(5)の右辺第一項は測定値のみで構成されるので，式(5)の最小化は，Lagrange 未定乗数λを含む，以下の評価関数の最大化問題に置き換えられます：

$$J_2(\mathbf{p}) \equiv \frac{1}{N_{samp}}\sum_{i=1}^{N_{samp}} |\mathbf{q}_i^\dagger\cdot\tilde{\mathbf{p}}|^2 - \lambda\left(|\tilde{\mathbf{p}}|^2 - 1\right). \quad (6)$$

上式を $\tilde{\mathbf{p}}$ の各成分で微分し極値を求めると，

$$\frac{1}{N_{samp}}\sum_{i=1}^{N_{samp}}(\mathbf{q}_i\mathbf{q}_i^\dagger)\cdot\tilde{\mathbf{p}} = \lambda\tilde{\mathbf{p}}, \quad (7)$$

を解くことと等価となり, 相互相関行列 $\overline{\mathbf{q}\mathbf{q}^\dagger}$ の固有値問題に帰着します．この手法を一般に Proper Orthogonal Decomposition[8]（POD）と呼びます．最大の固有値に対応する固有ベクトル $\tilde{\mathbf{p}}$ を第一 POD モードと呼び，通常，サンプルの平均値を表し，以下順に上位の第二，第三 POD モード等は，多くの非定常流体現象で流れ場を支配する運動を表現します．

POD 解析が Beam-forming 法と共通している点は，最小二乗法に基づいているだけでなく，相互相関行列を求める点にあります. 式(7)の $\mathbf{q}$ にフーリエ変換を施した値を代入すれば，式(4)で用いる Cross spectral matrix を POD により解析できます. 実際に，噴流近傍のマイクロフォンアレイで計測した圧力履歴から構築した Cross spectral matrix の第一 POD モードの位相は，線形不安定性解析の解と良く一致します[2]. POD 法では抽出した固有ベクトルを「モード」と呼ぶものの，分解の過程で物理現象を定式化する必要がありません．しかし，このように実際には，上位の POD モードが流れ場を支配する物理的な「モード」を抽出することが多くあります．

さらに重要な点は，POD モードは相関行列の固有値分解であるため，完全に相関がある複数の物理的な「モード」でも，一つの POD モードに集約されます. 基本的に個々の POD モードは独立した相関関係にある運動を表現します．ただし，全く誤差やノイズのない場合でも，相関が無い物理的な「モード」

が複数存在するときには，一般にそれぞれの POD モードは元の運動を完全に復元できません．これは物理的なモードを表すベクトル $\mathbf{p}$ は必ずしも直交条件を満たすとは限らないのに対し, POD モード $\tilde{\mathbf{p}}$ は Hermitian 行列の固有ベクトルであることから直交条件を満たすため，この二つの表現が一対一に対応しないことが分かります[4]．

2.3 Stochastic Estimation

POD 法と共に流体制御などで使われる Stochastic estimation 法[9]も，現象を定式化しない最小二乗問題で定義されます．この手法は，予備段階において観測したい物理量 p と複数点で得られる測定値 $\mathbf{q}$ を十分な回数サンプリングできる（少なくとも観測点の数より十分に多い）場合に適用できます．

観測したい物理量が，複数の測定値の線形関数 $p = \mathbf{a}^{\dagger}\cdot\mathbf{q}$（$\mathbf{a}$ は係数ベクトル）で表されると仮定し

$$J_2(\mathbf{a}) = \sum_{i=1}^{N_{samp}} \left| p_i - \mathbf{a}^{\dagger}\cdot\mathbf{q}_i \right|^2, \tag{8}$$

と評価関数を定義します．式(1)と同様，上式を $\mathbf{a}$ で微分することにより得られる連立方程式は

$$\mathbf{a} = \left(\frac{1}{N_{samp}} \sum_{i=1}^{N_{samp}} \mathbf{q}_i \mathbf{q}_i^{\dagger} \right)^{-1} \left(\frac{1}{N_{samp}} \sum_{i=1}^{N_{samp}} p_i^{*} \mathbf{q}_i \right), \tag{9}$$

となり，ここでも相互相関行列から測定値と物理量結ぶ係数が計算されます．フィードバック適用の際は，この係数 $\mathbf{a}$ と新たな測定値 $\mathbf{q}$ から物理量 p を推定します．流体制御などでは，限られた観測点での測定値から，物理量の概算値を瞬時に計算する必要があるため，このような手法が有効となります．

このように最小二乗法を用いて，データから物理現象を抽出法する方法は，多くの場合相互相関行列を導入するため，この行列からできるだけ多くの情報を引き出すことが未知の現象を解く鍵になります．例えば，固有値の分布や，固有ベクトルの位相と方向等が，物理的解釈を与える場合が多くあります．

2.4 データ再配置問題

最小二乗法の原理はデータの再配置問題にも応用できます[3]．実験で得たノイズを含む速度場$(U,\ V)$を数値計算上の速度場$(u,\ v)$に代入するため，連続の式を満たすよう以下の評価関数を最小化します：

$$J_2(u_{ij}, v_{ij}, \lambda_{ij}) = \sum_{i=1}^{N_x} \sum_{j=1}^{N_y} \left[(u_{ij} - U_{ij})^2 + (v_{ij} - V_{ij})^2 \right.$$

$$\left. + \lambda_{ij} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)_{ij} \right]. \tag{10}$$

ここで，最適化するパラメータはグリッド上の各点で速度成分$(u,\ v)$と Lagrange 未定乗数λの数だけあることになります．対象となる領域の外側でλが 0 に収束すると仮定し，部分積分を施した後，最適解となる再配置後の速度場を求めると

$$u = U + \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial x}, \qquad v = V + \frac{1}{2}\frac{\partial \lambda}{\partial y}, \tag{11}$$

となり，修正項のλは

$$\frac{\partial^2 \lambda}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \lambda}{\partial y^2} = -2\left(\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} \right), \tag{12}$$

のとおり，実験で得られた速度場の発散を生成項に持つ Poisson 方程式の解となることが分かります．この再配置法が実験データと数値計算法を融合したシミュレーションの基礎となっています．

3 噴流剪断層の非定常運動

3.1 Kelvin-Helmholtz **不安定波とその物理的抽出**

噴流の非定常流体現象と深く関係する Kelvin-Helmholtz 波は，線形性と局所での平行流を仮定して，圧縮性軸対称流の場合，圧力 $\Pi = \gamma^{-1}\log(p'/p_\infty)$ に関する二階の偏微分方程式[10]

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{a^2 r}{(\omega - kU)^2} \frac{\partial \Pi}{\partial r} \right] + \left[\frac{(\omega - kU)^2}{a^2} - k^2 - \frac{m^2}{r^2} \right]$$

$$\times \frac{a^2 r}{(\omega - kU)^2} \Pi = 0, \tag{13}$$

の解として近似できます．ここで，U, a はそれぞれ平均流の主流速度と音速で半径方向 r の関数，ω, k は角周波数と主流方向 x の波数，m は周方向のモード数とします．

式(13)のオペレータ（以下 $\mathcal{L}$ と表す）は Self-adjoint でないため，任意の圧力擾乱から特定の不安定波モードを数学的に分離するには，Adjoint オペレータ $\mathcal{L}^{\dagger}$ とその解 $\Pi^{\dagger}$ を定義し，境界条件と共に

$$\int_{r=0}^{\infty} \Pi^{\dagger}\mathcal{L}\Pi + \Pi\mathcal{L}^{\dagger}\Pi^{\dagger} dr = \frac{\partial J_t}{\partial t} + \frac{\partial J_x}{\partial x}, \tag{14}$$

を満たす J_t と J_x を求める必要があります（導出方は別途[3]参照）．これら積分式は Non-self-adjoint オ

ペレータの解を構成する上での内積に相当します．Bi-orthogonal decomposition[11]と呼ばれるこの方法は，オペレータの解を物理的に抽出するため，原則，対象となるモードの相対寄与の度合いによらず適用できます．ただし現実の使用は，流れ場が多くの仮定を満たし，ノイズが非常に小さい場合に限られます．

3.2 剪断層内の不安定性と音の発生

超音速噴流（厳密には対流速度が超音速の場合）から発生する音は，主音源が Mach wave であるとほぼ特定されているため [12]，直接的な解析手法が適用できます．また，不完全膨張の噴流から生ずる Screech 音や Shock-cell 音も，Kelvin-Helmholtz 波と衝撃波の干渉に起因することが判明しています [1, 13]．そこで剪断層内の不安定波の解析が不可欠ですが，この場合は，流体現象を定式化できる点が解析手法の幅を広げています．

一方，亜音速噴流から発生する音の研究の難しさは，音源に関して，解 p を未だ定義できないことにあります [4]．このため音源探査も，考えうる基本解を p に代入し得られた音源マップを基に，仮説の空力音響理論を検討するか，評価関数の最適化度合いから基本解の妥当性を検討する [14]等，解析手法に限りがあり，そのメカニズム解明には至っていません．

4 おわりに

超音速噴流に関わる音の発生は，紹介した論文も含め，その機構がおおよそ解明されたと言えます．一方，亜音速噴流から発生する音の研究は，音源の候補となる不安定波を定量化した所までしか行き着いていません．今後は音源を数学的にモデル化し，データから抽出したモードと比較検討することで，発生メカニズムを解明する研究が期待されます．

謝辞：竜門賞受賞にあたり，共著者であり指導者でもあった，Prof. Sanjiva K. Lele, Prof. Tim Colonius，および山本富士夫教授に深く御礼申し上げます．また，実験と計算の融合研究には理解ある共同研究者が不可欠であり，計算・実験データおよび装置を快く提供して下さった，Dr. James E. Bridges, Dr. Sang Soo Lee, Prof. Jonathan B. Freund，村井祐一教授，また，実験測定に貢献していただいた幸川光雄技官と福井大学時代の学生を含む，多くの方々に感謝の意を表します．それから何より，波動方程式の解法を Prof. Joseph B. Keller に教授いただいたことが生涯の財産になったことを記し，結びとしたいと思います．

引 用 文 献

1) Suzuki, T. & Lele, S. K.: Shock leakage through an unsteady vortex-laden mixing layer: application to jet screech, J. Fluid Mech., **490** (2003) 139-167.
2) Suzuki, T. & Colonius, T.: Instability waves in a subsonic round jet detected using a near-field phased microphone array, J. Fluid Mech., **565** (2006) 197-226.
3) Suzuki, T., Ji, H. & Yamamoto, F.: Instability waves in a low-Reynolds-number planar jet investigated with hybrid simulation combining particle tracking velocimetry and direct numerical simulation, J. Fluid Mech., **655** (2010) 344-379.
4) Suzuki, T.: Review of diagnostic studies on jet-noise source and generation mechanisms in subsonically-convecting jets, Fluid Dyn. Res., **42** (2010) 014001 (30pp).
5) Pillai, S. U.: *Array Signal Processing* (Springer, 1989).
6) Johnson, D. H. & Dudgeon, D. E.: *Array Signal Processing: Concepts and Techniques* (Prentice-Hall, 1993).
7) Suzuki, T. & Colonius, T.: Inverse-imaging method for detection of a vortex in a channel, AIAA J., **41**, no.9 (2003) 1743-1751.
8) Lumley, J. L.: *Stochastic Tools in Turbulence* (Academic, 1970).
9) Adrian, R. J. & Moin, P.: Stochastic estimation of organized turbulent structure: homogeneous shear flow, J. Fluid Mech., **190** (1988) 531-559.
10) Pridmore-Brown, D. C.: Sound propagation in a fluid flowing through an attenuating duct, J. Fluid Mech., **4** (1958) 393-406.
11) Salwen, H. & Grosch, C. E.: The continuous spectrum of the Orr-Sommerfeld equation. Part 2. eigenfunction expansions, J. Fluid Mech., **104** (1981) 445-465.
12) Ffowcs Williams J. E. & Maidanik, G.: The Mach wave field radiated by supersonic turbulent shear flows, J. Fluid Mech., **21** (1965) 641-657.
13) Powell A.: On the mechanism of choked jet noise, Proc. Phys. Soc. Lond. B **66**, (1953) 1039-1056.
14) Suzuki, T.: Identification of multipole noise sources in low Mach number jets near the peak frequency, J. Acoust. Soc. Am., **119**, no.6 (2006) 3649-3659.