〔談話室〕

オイラー方程式の南部力学表現について

*九州大学 大学院数理学研究院　福 本 康 秀†

On the Nambu representation of the Euler equations

Yasuhide FUKUMOTO, Faculty of Mathematics, Kyushu University

1 はじめに

2008 年のノーベル物理学賞は南部陽一郎，益川敏英，小林誠の 3 人の日本人が受賞し，下村脩氏のノーベル化学賞受賞と合わせて日本中が大いに沸きたった．受賞理由は，益川，小林両氏は「クォークが 3 世代以上必要なこと」の予言，南部氏は「対称性の自発的破れ」の提唱で，小林・益川理論の基礎にもなっている．

南部氏は数々の先駆的研究を行ってきた．渦糸の運動方程式をハミルトンの最少作用の原理から導く場合に出発点となるのは南部あるいは南部-後藤の作用で，渦糸の研究をはじめた頃，素粒子の紐のモデルの端緒となった南部氏の 1970 年の理論を勉強した．間もなく，超弦理論ブームが巻き起こって今に続いている．また，南部氏が大阪市立大学に転出されたとき，恩師の橋本英典先生が副手として東京大学理学部物理学科の物理数学の演習を引き継いだというエピソードをうかがったことがあり，南部という名前は脳裏に焼きついている．

南部力学というものがある [1]．自由な剛体運動 (以下「Euler のこま」と呼ぶ) の方程式に深い洞察を加えてそれを一般化したものと推察される．Euler のこまは, Lie 群 SO(3) を配位空間とする Lie-Poisson 方程式にしたがう．Arnold は，SO(3) を微分同相写像群 SDiff($\mathcal{D}$) で置き換えるだけで，領域 $\mathcal{D}$ 内の完全流体の運動方程式が同じ形式をとることを示した．流体は Euler のこまの無限次元版である．南部力学では Lie-Poisson 構造を Casimir 不変量の微分で置き換える．完全流体の 3 次元運動においては Casimir 不変量はヘリシティしかない [3]．南部力学表現では方程式にヘリシティが顔を出す [2]．

時の流れははやいもので，2008 年のノーベル賞は過去の出来事という感があるが，南部力学は決して色あせることはない．それどころか，南部力学は未だその効力を十分には顕していないように思われるので，以下に文献 2) のさわりを紹介したい．

* 〒 819–0395 福岡市西区元岡 744
†E-mail: yasuhide@math.kyushu-u.ac.jp

2 Euler のこま

外力の作用を受けない剛体の運動について考えよう．剛体にくっついた座標軸の姿勢だけを指定すればよいので，配位空間は SO(3) である．Euler は，固定点 O を原点とする剛体にくっついた座標系 – 物体座標系 – に乗り，物体系での角運動量 (L_1, L_2, L_3) を従属変数にとると，運動方程式が 3 本の 1 階連立常微分方程式系に還元できることを示した．

物体系での直交座標軸を固定点 O まわりの慣性モーメントテンソルの主軸と一致させ，主慣性モーメントの各成分を I_1, I_2, I_3 とする．角速度の物体系での表示を $\boldsymbol{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3)$ とすると，O まわりの角運動量は物体系では $\boldsymbol{L} = (I_1\Omega_1, I_2\Omega_2, I_3\Omega_3)$ とかけ，角運動量保存を要請すると，

$$\dot{L}_1 = \frac{I_2 - I_3}{I_2 I_3} L_2 L_3, \quad \dot{L}_2 = \frac{I_3 - I_1}{I_3 I_1} L_3 L_1,$$
$$\dot{L}_3 = \frac{I_1 - I_2}{I_1 I_2} L_1 L_2 \tag{1}$$

が導かれる．上付きドットは時間微分をあらわす．

角運動量 $\boldsymbol{L}$ の関数 $F(L_1, L_2, L_3)$ に対して，勾配を $\nabla F = (\partial F/\partial L_1, \partial F/\partial L_2, \partial F/\partial L_3)$ によって定義し，Lie-Poisson 括弧

$$\{F, H\}(\boldsymbol{L}) = -\boldsymbol{L} \cdot (\nabla F \times \nabla H) \tag{2}$$

を導入する．Euler 方程式 (1) は

$$H = \frac{1}{2}\left(\frac{L_1^2}{I_1} + \frac{L_2^2}{I_2} + \frac{L_3^2}{I_3}\right) \tag{3}$$

をハミルトニアンとする Poisson 方程式

$$\dot{F} = \{F, H\} \tag{4}$$

の形でかける．角運動量の大きさ $L^2 = L_1^2 + L_2^2 + L_3^2$ の任意関数 $C = C(L^2)$ は，$\nabla C(L^2) = 2C'(L^2)\boldsymbol{L}$ (’ は微

分をあらわす) と (2) より，H の形いかんによらず保存量になる：$\dot{C}=0$．これを Casimir 不変量という．うち，とくに $G=L^2/2$ をとると，Lie-Poisson 括弧 (2) は

$$\{F,H\}=\nabla F\cdot(\nabla G\times\nabla H)=\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(L_1,L_2,L_3)} \qquad (5)$$

とかける．最右辺は Jacobi 行列式である．この南部表現は $C=C(L^2)$ が Casimir 不変量であることをあらわにする．各成分 L_i に対する運動方程式 (1) は，$F=L_i$ とおいて Poisson 方程式を書き下すと，

$$\dot{L}_i=\frac{\partial(L_i,G,H)}{\partial(L_1,L_2,L_3)}=(\nabla G\times\nabla H)_i \qquad (6)$$

となる．これが南部力学の原型である，G と H の役割を入れ替えて，G をハミルトニアンとみることもできる．

3　完全流体の渦度方程式

3 次元領域 $\mathcal{D}$ 内の非圧縮非粘性流体の運動を考えよう．速度場を $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ とおき，密度を $\rho=1$ ととる．渦度 $\boldsymbol{\omega}=\nabla\times\boldsymbol{u}$ の時間発展は Euler 方程式の回転 rot $=\nabla\times$ をとった渦度方程式

$$\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}=\nabla\times(\boldsymbol{u}\times\boldsymbol{\omega})=-(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)+(\boldsymbol{\omega}\cdot\nabla)\boldsymbol{u} \qquad (7)$$

にしたがう．剛体の Euler 方程式 (1) のベクトル表示は

$$\dot{\boldsymbol{L}}=\boldsymbol{L}\times\boldsymbol{\Omega} \qquad (8)$$

である．SO(3) の Lie 環 so(3) の Lie 括弧は $[\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}]=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}$ という表現をとる．SDiff($\mathcal{D}$) の Lie 環が $\mathcal{D}$ 上のベクトル場で，ベクトル場の Lie 括弧 (Jacobi-Lie 括弧) は $[\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}]=(\boldsymbol{u}\cdot\nabla)\boldsymbol{v}-(\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{u}$ で与えられる．正確には，渦度と剛体の角運動量に対する 2 つの Euler 方程式 (7), (8) の右辺はいずれも Lie 環の余随伴表現である．

この形式的同一性は (7) も Lie-Poisson 方程式の形でかけることを意味する．渦度場 $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)$ の関数，すなわち，汎関数 $F[\boldsymbol{\omega}]$ が

$$F[\boldsymbol{\omega}]=\int_{\mathcal{D}}f(\boldsymbol{\omega})\,\mathrm{d}V \qquad (9)$$

で与えられているとき，F の $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)$ による汎関数微分は $\delta F/\delta\boldsymbol{\omega}=\partial f/\partial\boldsymbol{\omega}$ である．右辺はふつうの偏微分である．非圧縮性流体の速度場はソレノイダル・ベクトルなので，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{x},t)$ をもち ($\boldsymbol{u}=\nabla\times\boldsymbol{A}$)，境界条件 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{0}$ on $\partial\mathcal{D}$ を課すと，流体の全運動エネルギーは

$$H[\boldsymbol{\omega}]=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{u}^2\,\mathrm{d}V=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{\omega}\cdot\boldsymbol{A}\mathrm{d}V \qquad (10)$$

によって与えられる．渦度場 $\boldsymbol{\omega}$ を $\boldsymbol{A}$ と $\boldsymbol{u}$ に結びつける Biot-Savart の法則を組み込むと，エネルギー H は $\boldsymbol{\omega}(\boldsymbol{x},t)$ の汎関数とみなすことができ，汎関数微分をとると，$\delta H/\delta\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{A}$ である．因子 1/2 が落ちるのは，ベクトル・ポテンシャル $\boldsymbol{A}$ が $\boldsymbol{\omega}$ の 1 次式を含むからである．渦度 $\boldsymbol{\omega}$ の汎関数 F, H に対する Lie-Poisson 括弧

$$\{F,H\}=\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{\omega}\cdot\left(\mathrm{rot}\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{\omega}}\times\mathrm{rot}\frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{\omega}}\right)\mathrm{d}V \qquad (11)$$

を導入すると，渦度方程式 (7) は任意の汎関数 $F[\boldsymbol{\omega}]$ に対する Lie-Poisson 方程式の格好でかける：

$$\dot{F}=\int_{\mathcal{D}}\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{\omega}}\cdot\frac{\partial\boldsymbol{\omega}}{\partial t}\,\mathrm{d}V=\{F,H\}. \qquad (12)$$

ヘリシティ

$$h[\boldsymbol{\omega}]=\frac{1}{2}\int_{\mathcal{D}}\boldsymbol{u}\cdot\boldsymbol{\omega}\,\mathrm{d}V \qquad (13)$$

はトポロジー的不変量である．後のために，通常の定義に因子 1/2 をつけている．Biot-Savart の法則を組み込むと，h は $\boldsymbol{\omega}$ の汎関数とみなすことができ，汎関数微分は $\delta h/\delta\boldsymbol{\omega}=\boldsymbol{u}$ で与えられる．よって，(12) は

$$\dot{F}=-\int_{\mathcal{D}}\mathrm{rot}\frac{\delta F}{\delta\boldsymbol{\omega}}\cdot\left(\mathrm{rot}\frac{\delta h}{\delta\boldsymbol{\omega}}\times\mathrm{rot}\frac{\delta H}{\delta\boldsymbol{\omega}}\right)\mathrm{d}V \qquad (14)$$

と書き換えられる．ヘリシティ h が H の中身によらず保存されること，すなわち，Casimir 不変量であることは一目瞭然である．逆に言うと，南部表現は Lie-Poisson 構造の中に隠れているヘリシティを表舞台に引きずり出す．

2 次元の流体運動においては，渦度の任意関数が Casimir 不変量で，h の代わりにエンストロフィ (渦度の 2 乗の積分) をとれば，2 次元渦度方程式が導ける [2]．この枠組みを MHD など種々の連続体力学に拡張するのは面白いであろう．南部氏は原論文 [1] で自身が発見した枠組みの代数構造と系の量子化を追求した．流体方程式における南部表現にはまだまだ秘められた何かがあるような気がする．南部力学表現の意味を汲み出し，それを活用することについては今後の展開に期待したい．

謝辞

本企画は中村育雄先生より提案されました．筆者に南部力学について書く機会を与えてくださった中村先生および大信田丈志編集委員に心より感謝申し上げます．

引用文献

1) Nambu, Y.: Generalized Hamiltonian dynamics, Phys. Rev. D **7** (1973) 2405–2412.
2) Névir, P. & Blender R.: A Nambu representation of incompressible hydrodynamics using helicity and enstrophy, J. Phys. A: Math. Gen. **26** (1993) L1189–L1193.
3) Fukumoto, Y.: A unified view of topological invariants of fluid flows, Topologica **1** (2008) 003.