

〔原著論文〕

# チャネル流における秩序構造の分岐解析

\*関西大学 工学部 板野 智昭<sup>†</sup>\*\*京都大学大学院 理学研究科 藤 定義<sup>††</sup>

圧力勾配によって駆動される 2 平板間流れ (チャネル流) の定常進行波解を数値的に求めた. 求解には仮想的な外力を導入することによる解の連続的な接続法とニュートン法による数値計算を用いた. 外力の形は Waleffe(2003)[Phys. Fluids. 15(6) 1517] とは異なるが, 最終的に得られた解は Waleffe が求めた解に一致すると考えられる. 更に得られた解の倍のスパン方向幅をもつ計算領域に本手法を応用することで, Waleffe の解の倍周期分岐解を求めた.

## Bifurcation Problem of Coherent Structures in Channel Flow

Tomoaki ITANO, Faculty of Engineering, Kansai University

Sadayoshi TOH, Department of Physics and Astronomy, Graduate School of Science,

Kyoto University

(Received 19 December, 2005; in revised form 24 February, 2006)

A traveling-wave solution with coherent structures typical in channel flow is numerically obtained by employing Newton-Raphson method and continuation of solutions by smooth transformation homotopy. The artificial force term used in the continuation method is different from that in Waleffe(2003)[Phys. Fluids. 15(6)1517], while the solution seems to be finally converged to the same. By applying the method to the computational domain with a spanwise wavelength that is twice that of Waleffe's solution, we have found the subharmonic branches of the solution, that contain not a single structure but several structures with different scales.

(KEY WORDS): wall turbulence, channel flow, coherent structure, bifurcation theory

### 1 緒言

#### 1.1 統計から構造, そして機構の解明

乱流研究の歴史は大変長い, 近年, 乱れの中に現れる秩序構造が乱流中で果たす役割りが明らかになるにつれ, 研究者らの関心は, 乱流の統計から構造の動力学の解明に移ってきた. このような潮流は壁乱流においても同じで, たとえば河原・木田<sup>1)</sup> はミニマルユニット<sup>2)</sup> と呼ばれる小さな計算領域を用いて平板クエット流れの直接数値計算を行い, 相空間中に描かれる時間発展軌道に周期的な特徴が隠れていることを見出した. 彼らは計算から得たデータをもとに分岐解析を行い, 数値的

に厳密な意味でナビエ・ストークス方程式の非線形周期解を求めることに成功した. この周期解は静的・層流的小よび動的・乱流的な二つのフェーズからなるが, 静的なフェーズにおいて比較的長い時間維持される流れのパターンは, 従来より実験で知られていた壁近傍構造に類似している. 河原らが求めた解は Waleffe らによる先駆的研究から理論的に予言されていた壁近傍にある壁乱流維持の最小メカニズム, 自己維持過程<sup>3-5)</sup> (SSP, Self-Sustaining Process) の原型と考えることができる.

#### 1.2 外層の大規模構造

現実の乱流における乱れの源は壁近傍にあるメカニズムだけとは限らない. 壁乱流の場合, 大小様々なスケールの渦構造が壁から階層的に, かつ空間的に重なりあって存在していると考えられ<sup>6,7)</sup>, 事実, 壁から離れた領

\*〒 564-8680 大阪府吹田市山手町 3-3-35

†E-mail: t050028@ipcku.kansai-u.ac.jp

\*\*〒 606-8502 京都市左京区北白川追分町

††E-mail: toh@scphys.kyoto-u.ac.jp

域にも秩序的な構造が存在することが近年数多く報告されている。そのうちの一つに、壁から離れた領域に存在する大規模構造<sup>8-10)</sup>が挙げられる。大規模構造とは外部層、対数則層からバッファ層にまで達する秩序構造<sup>12)</sup>で、スパン方向の構造間間隔が排除厚み等、外部長さでスケールされる点を除けば、その形は壁面近傍に観測される低速流と高速流の縞(ストリーク)に似ている(以下ではバッファ層から壁面までを壁近傍領域と呼ぶことにする)。このため大規模構造は流れ方向速度の大小を用いて同定されることが多い。また大規模構造の低速流と高速流の間の剪断を維持するためにこれら縞の間には、流れ方向に軸をもち時間的・空間的にスケールの大きな循環が存在すると考えられる。大規模構造の流れ方向のスケールは長大<sup>11)</sup>で、その完全な姿を再現するために大規模な計算が近年盛んに行われている。現在、大規模構造の形態についてはある程度解明が進んでいる一方で、その発生メカニズムや壁近傍の流れへの役割割りについてはまだ統一的な理解は得られていない。これに対し、我々は直接数値計算を用いた過去の研究<sup>13)</sup>で、大規模構造の発生は複数の壁近傍の秩序構造がスパン方向に並ぶことで生まれる倍周期の摂動に対する不安定性に起因するという仮説をたてた。

### 1.3 壁近傍構造をもつ進行波解の分岐解析

流れの分岐解析の分野では、何らかのパラメータ(ホモトピーパラメータ)を連続的に変化させることで解の接続を追い、未知の解を発見する方法(Continuation method, 以下では単に接続法と呼ぶ)が古くから使われてきた<sup>16,17)</sup>。チャンネル流は壁乱流の分野で最も興味深い対象の一つであり、当然のことながら、そこで発現する秩序構造を有す有限振幅解を求める際には接続法が有力な手段であると期待されていたにも関わらず、これまで長らく成果は示されないままであった。チャンネル中の秩序構造をもつ厳密解を求めるためにWaleffe(2003)は系に適した仮想的な外力を導入し、この外力の連続的な変化にともなう解の接続<sup>14,15)</sup>を追うことで、チャンネル流の有限振幅解を見つけることに成功した。Waleffeの用いた仮想的な外力の導入はチャンネル流の場合のみならず、円管内流れの秩序構造を求める場合にも有効であることが最近の研究から分かっている<sup>18)</sup>。

本研究では、Waleffe(2003)の求解の過程で必要とされた手続きを簡略化した新しい接続法を提案し、ニュートン法を用いてチャンネル流中の数値解を求める。得られた解は結果的にはWaleffeが求めた厳密解と一致すると考えられる。更に、Waleffeの解のスパン方向に倍の周期の計算領域へ今回用いた接続法を応用し、Waleffeの解の倍周期分岐解を求める。倍周期分岐解がもつ二つの長

さスケールに対応する構造の特徴は、大規模構造と壁近傍構造に対応していると考えられる。次章では系の方程式と探索方法について述べ、今回得られたWaleffeの解を示すとともに、続く章では新しく得られた倍周期分岐解の特徴について述べる。

## 2 計算手法

### 2.1 支配方程式

無限平行平板間(チャンネル  $-h < \tilde{y} < +h$ )を満たし非圧縮ナビエ・ストークス方程式に従う流体を考える。

$$\begin{aligned}\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{u}} &= 0, \\ \partial_{\tilde{t}} \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\nabla} \tilde{\mathbf{u}} &= -\tilde{\nabla} \tilde{p} + \tilde{\nu} \tilde{\nabla}^2 \tilde{\mathbf{u}} + \tilde{\mathbf{F}}.\end{aligned}$$

ここで  $\tilde{\nabla}$  は有次元の座標  $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$  に関する偏微分を表す。平板上  $\tilde{y} = \pm h$  で粘着条件  $\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{0}$ 、流れ方向  $\tilde{x}$  およびスパン方向  $\tilde{z}$  には周期境界条件を課す。以下では計算領域の流れ方向の周期を  $\tilde{L}_x$ 、スパン方向の周期を  $\tilde{L}_z$  とし、それぞれに対応する波数を  $(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = (2\pi/\tilde{L}_x, 2\pi/\tilde{L}_z)$  とする。

$\tilde{\mathbf{F}}$  は外部から流体要素に作用する体積力一般を表現するが、本研究では次のような形に特定する。

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{F}} &= \tilde{F}_x \mathbf{e}_x + \tilde{F}_y \mathbf{e}_y + \tilde{F}_z \mathbf{e}_z, \quad \tilde{F}_x = \frac{\Delta \tilde{P}}{\tilde{L}_x}, \\ \tilde{F}_y &= \tilde{f}_r \tilde{y} \cos(\tilde{\gamma} \tilde{z}), \quad \tilde{F}_z = -\frac{\tilde{f}_r}{\tilde{\gamma}} \sin(\tilde{\gamma} \tilde{z}).\end{aligned}$$

流れ方向成分  $\tilde{F}_x \mathbf{e}_x$  は、実験などで流れの駆動に必要なとなる流路の入口と出口の圧力差  $\Delta \tilde{P} (> 0)$  に起因する力である。以下で与えられるように、この圧力差はレイノルズ数  $\text{Re}_P$  と比例関係にある。一方、これとは垂直な断面内の方向に加わる力の成分  $\tilde{F}_y \mathbf{e}_y + \tilde{F}_z \mathbf{e}_z$  は、断面内の座標  $(\tilde{y}, \tilde{z})$  に依存する通常のチャンネル流では非現実的な力<sup>注1)</sup>である。この成分を以下では仮想外力と呼ぶ。本研究で用いる仮想外力とWaleffe(2003)で使われた仮想外力<sup>15)</sup>は数学的には異なるものである。しかしながら、この外力が上下二つの半計算領域 ( $\tilde{y} < 0$  と  $\tilde{y} > 0$  の領域) に対称な形で、流れ方向に回転軸をもった二次元的な渦対を生み出す効果を持つという点では、分岐解析における仮想外力の役割は定性的には同等なものであると予想される。ここで用いる仮想外力の大きさが有限の際に得られる解は特殊な解であるが、仮想外力の係数  $\tilde{f}_r \rightarrow 0$  の極限に限り、解  $(\tilde{\mathbf{u}}, \tilde{p})$  は、我々が通常考えるチャンネル流の厳密解になる。例えば  $\tilde{f}_r = 0$  における層流解は次のように表される。

$$\tilde{\mathbf{u}} = \tilde{U}_0 \left(1 - \left(\frac{\tilde{y}}{h}\right)^2\right) \mathbf{e}_x, \quad \tilde{p} = 0.$$

<sup>注1)</sup> 任意の  $\gamma$  に対して  $\tilde{\nabla} \cdot \tilde{\mathbf{F}} = 0$  が自動的に満たされている。

$N_x$	$N_y$	$N_z$	$\int_V  u_{3D} ^2 dV / L_x L_z$ $\times 10^{-2}$	$\int_V  v_{3D} ^2 dV / L_x L_z$ $\times 10^{-4}$	$\int_V  w_{3D} ^2 dV / L_x L_z$ $\times 10^{-3}$	$c_x$ $\times 10^{-1}$
05	33	08	1.2658017827	4.2181621434	1.2690662855	7.0986645729
09	33	16	1.2375118576	3.4315164002	1.2095019071	7.2738861005
17	33	32	1.2388729536	3.4363128221	1.2066027770	7.2738839824
09	17	16	1.3088759721	4.8838838839	1.2078819929	7.0608648725
09	33	16	1.2375118576	3.4315164002	1.2095019071	7.2738861005
09	65	16	1.2375064031	3.4314742112	1.2094587792	7.2739588332

表1  $\text{Re}_P = 1000, f_r = 1.0 \times 10^{-3}$ 

ここで  $\tilde{U}_0$  は層流の中心最大速度であり  $\tilde{U}_0 = \frac{\Delta \bar{P} \tilde{h}^2}{2L_x \tilde{\nu}}$  で定義される。

次に  $\tilde{U}_0$  と、平板間距離の半分の長さ  $\tilde{h}$  を用いて方程式の無次元化を行う<sup>注2)</sup>。

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{u} &= 0, \\ \partial_t \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} &= -\nabla p + \frac{1}{\text{Re}_P} \nabla^2 \mathbf{u} + \mathbf{F}. \end{aligned}$$

ここで圧力勾配一定下におけるチャンネル流のレイノルズ数  $\text{Re}_P$  は次の関係式により定義される。

$$\text{Re}_P = \frac{\tilde{U}_0 \tilde{h}}{\tilde{\nu}}.$$

平板上  $y = \pm 1$  で粘着条件  $\mathbf{u} = \mathbf{0}$  を、流れ方向  $x$  およびスパン方向  $z$  には周期 ( $L_x, L_z$ ) の周期境界条件を課す。それぞれに対応する無次元波数は  $(\alpha, \gamma) = (2\pi/L_x, 2\pi/L_z)$  のように再定義される。

解が満たすべき基礎方程式は圧力を消去することにより次の方程式と等価である。

$$\begin{aligned} \partial_t \nabla^2 u_y &= \mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}_P} \nabla^4 u_y + \nabla^2 F_y, \\ \partial_t \omega_y &= -\mathbf{e}_y \cdot \nabla \times \mathbf{H} + \frac{1}{\text{Re}_P} \nabla^2 \omega_y, \\ \partial_t U_x &= -\overline{\mathbf{e}_x \cdot \mathbf{H}} + \frac{1}{\text{Re}_P} \partial_y^2 U_x + \frac{2}{\text{Re}_P}, \\ \partial_t U_z &= -\overline{\mathbf{e}_z \cdot \mathbf{H}} + \frac{1}{\text{Re}_P} \partial_y^2 U_z. \end{aligned}$$

ただし

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \quad \boldsymbol{\omega} = \nabla \times \mathbf{u}, \quad \mathbf{U} = \bar{\mathbf{u}}, \\ \overline{(\cdot)} &= \frac{1}{L_x L_z} \int_0^{L_x} \int_0^{L_z} (\cdot) dx dz. \end{aligned}$$

以下ではこの方程式の解をチェビシエフ・フーリエ展開を用いたガラーキン法を用いて求める。

## 2.2 対称性と解の表現

以降の解析では、解に対し次の制限をおく。まず解が  $x$  方向に進行する定常進行波解であることを仮定する。

<sup>注2)</sup> すなわち  $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{u}}/\tilde{U}_0, p = \tilde{p}/\tilde{U}_0^2, \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}/\tilde{h}, t = \tilde{t}\tilde{h}/\tilde{U}_0, \nabla = \tilde{h}\tilde{\nabla}, \mathbf{F} = \tilde{\mathbf{F}}\tilde{h}/\tilde{U}_0^2$  を用いる。

解の流れ方向の位相速度  $c_x$  を用いると流れ場の時間微分は空間微分を用いて次のように与えられる。

$$\partial_t \mathbf{u}(x, y, z, t) = -c_x \partial_x \mathbf{u}(x, y, z, t).$$

加えて文献<sup>15)</sup>に倣い、本研究では以下に挙げる二つの対称性を満たす流れ場を扱う。

1. 平行移動不変性および反転対称性,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ -u_z \\ p \end{pmatrix} \left(x + \frac{L_x}{2}, y, -z\right).$$

2. 上下反転対称性,

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix} (x, y, z) = \begin{pmatrix} u_x \\ -u_y \\ u_z \\ p \end{pmatrix} (x, -y, z).$$

境界条件として平板上  $y = \pm 1$  で  $u_y = \partial_y u_y = \omega_y = U_x = U_z = 0$ , 流れ方向およびスパン方向には周期境界条件を課す。境界条件を満たす流れ場や渦度場は、流れ方向とスパン方向にはフーリエ展開、壁に垂直な方向にはチェビシエフ多項式と  $(1-y^2)$  あるいは  $(1-y^2)^2$  の積からなる多項式の展開を用いて、次のように表現できる<sup>注3)</sup>。

$$u_y(x, y, z) = \sum_{n_y=0}^{N_y-5} \sum_{n_x=-N_x+1}^{N_x-1} \sum_{n_z=-\frac{N_z}{2}+1}^{\frac{N_z}{2}}$$

$$\hat{u}_y(n_x, n_y, n_z) (1-y^2)^2 T_{n_y}(y) e^{in_x \alpha x} e^{in_z \gamma z},$$

<sup>注3)</sup> いずれの変数も  $N_y - 1$  次の  $y$  の多項式で表現できるように次数を揃えるため、見かけ上  $u_y$  と  $\omega_y, U_y, U_z$  では展開項数に違いがある ( $N_y - 5$  もしくは  $N_y - 3$ )。しかしながら図1のスペクトルを見ても分かるように高い次数における展開係数は十分に小さいのでその差は結果には大きく影響しない。

$$\omega_y(x, y, z) = \sum_{n_y=0}^{N_y-3} \sum_{n_x=-N_x+1}^{N_x-1} \sum_{n_z=-\frac{N_z}{2}+1}^{\frac{N_z}{2}}$$

$$\hat{\omega}_y(n_x, n_y, n_z)(1-y^2)T_{n_y}(y)e^{in_x\alpha x}e^{in_z\gamma z},$$

$$\begin{pmatrix} U_x \\ U_z \end{pmatrix}(y) = \sum_{n_y=0}^{N_y-3} \begin{pmatrix} \hat{U}_x(n_y) \\ \hat{U}_z(n_y) \end{pmatrix} (1-y^2)T_{n_y}(y).$$

$u_x, u_z, p$  は非圧縮条件と渦度の定義式を用いることにより  $u_y, \omega_y, U_x, U_z$  から計算することができる. 上述の解の展開形を前節の終りに示した基礎方程式に代入しガラーキン法を用いると, 展開係数  $\hat{u}_y, \hat{\omega}_y, \hat{U}_x, \hat{U}_z$  と位相速度  $c_x$  を未知数とした二次の非線形代数方程式

$$F(\mathbf{X}; \text{Re}_P, f_r) = 0$$

が得られる. ここで  $\mathbf{X}$  は  $\hat{u}_y(n_x, n_y, n_z), \hat{\omega}_y(n_x, n_y, n_z), \hat{U}_x(n_y), \hat{U}_z(n_y), c_x$  を成分にもつベクトルである. ただし対称性から従属関係にあるモードは  $\mathbf{X}$  の成分としてカウントしない. この代数方程式をニュートン法を用いて数値的に解いた結果が以降で示される定常進行波解である.

### 3 計算結果

本問題における外部パラメータには  $\text{Re}_P, f_r, \alpha, \gamma$  がある. まず解の収束に必要なモードの数を把握するため,  $(\text{Re}_P, f_r, \alpha, \gamma) = (1000, 0.001, 1.00, 2.60)$  に固定して, 収束した解の代表的な物理量がニュートン法に用いられる打ち切り項数にどれほど依存するかを検証した. 表 1 に示されるように打ち切り項数を  $(N_x, N_y, N_z) = (9, 33, 16)$  程度にしておく, 解が持つ代表的な物理量に対しては少なくとも三桁程度の精度は確保できることがわかる. 表中  $f_{3D}$  (ただし  $f = u, v, w$ ) は  $f(x, y, z)$  のうち  $x$  に依存するフーリエ成分からの寄与を意味する. すなわち

$$\hat{f}_{n_x}(y, z) = \frac{1}{L_x} \int_0^{L_x} f(x, y, z) e^{-in_x\alpha x} dx,$$

$$f_{3D}(x, y, z) = \sum_{n_x \neq 0} \hat{f}_{n_x}(y, z) e^{in_x\alpha x}.$$

使われた打ち切り項数  $(N_x, N_y, N_z)$  に対し収束の程度を示すもう一つの指標としてエネルギースペクトルの減衰を示す. 図 1 は  $(N_x, N_y, N_z) = (9, 33, 16)$  の場合, 収束した解の壁に垂直な速度成分  $u_y(n_x, n_y, n_z)$  について  $(n_y, n_z) = (1, 1)$  を固定して  $n_x$  を変化させた場合 (+),  $(n_x, n_z) = (1, 1)$  を固定して  $n_y$  を変化させた場合 (×),  $(n_x, n_y) = (1, 1)$  を固定して  $n_z$  を変化させた場合 (○) のスペクトルの減衰を示している. 図から

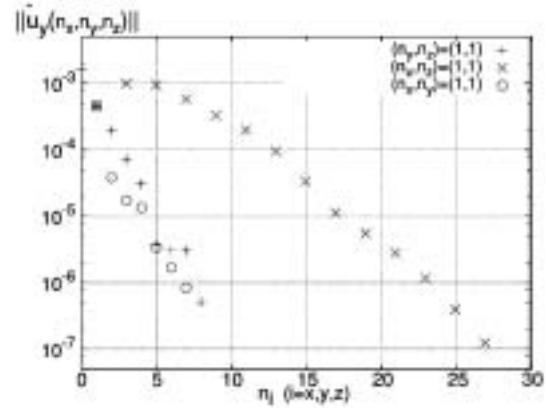


図 1 収束した解の  $\|u_y(n_x, n_y, n_z)\|$  のスペクトルの減衰の様子.  $n_x = 0, \dots, N_x - 1$  かつ  $(n_y, n_z) = (1, 1)$  (+でマーク),  $n_y = 0, \dots, N_y - 1$  かつ  $(n_x, n_z) = (1, 1)$  (×でマーク),  $n_z = 0, \dots, N_z - 1$  かつ  $(n_x, n_y) = (1, 1)$  (○でマーク).

分かるように  $\text{Re}_P \approx 1000$  程度では, 以降で代表値として用いる打ち切り項数  $(N_x, N_y, N_z) = (9, 33, 16)$  を用いてもスペクトルが高波数側で十分減衰していることが確認できる. なお同様のことは波数の高いモード (上の  $(1, 1)$  に代えてたとえば  $(n_y, n_z) = (3, 3)$  にとった場合など) でも検証している.  $(n_y, n_z) = (3, 3)$  に固定した場合のスペクトルの減衰は  $(n_y, n_z) = (1, 1)$  に固定した場合に比べ緩やかになる傾向が認められたが, この原因としては,  $v_{0,3,3}$  の絶対値が  $v_{0,1,1}$  に比べ小さくなり高波数になるに従い丸め誤差からの影響が大きくなること, また本計算では  $|n_x| + |n_z|$  の値が大きい場合は係数をゼロとするカットオフ法<sup>19)</sup> を用いていることが要因として挙げられる.

$f_r \rightarrow 0$  の極限で解はチャンネル流の解に対応する. レイノルズ数と解の流れ方向の位相速度の関係を図 2 に示す. レイノルズ数の上昇に伴い上分岐・下分岐のいずれの解も位相速度は低下する傾向にあるのがみてとれる. また進行波解の位相速度とともに計算領域内の流れ方向速度の最大値もレイノルズ数の増加とともに減少傾向にある. たとえば  $(\alpha, \gamma) = (1.00, 2.60)$  の場合を挙げると, 下分岐解は  $\text{Re}_P = 1500$  のとき, 計算領域内の流れ方向速度の最大値  $\max(u_x) = 0.52$  だったのが,  $\text{Re}_P = 3000$  では  $\max(u_x) = 0.40$  にまで減少する. これはレイノルズ数の上昇に伴い秩序構造が壁に近接し, 計算領域中央部分では流れのプロファイルが平らになる乱流特有の傾向を表していると考えられる.

先に述べたように, 本研究で用いられた仮想外力と境界条件に関しては, Waleffe(2003) と本研究ではアプローチの仕方<sup>15)</sup> に違いはあるが, 外力がつくり出す流れの性質や以下に示す可視化結果の類似性から, 最終的に  $f_r = 0$  かつ壁面で粘着条件に課した時に得られる定常進行波解は一致すると考えられる. そこで以下では本研究で得られた解を便宜上”Waleffe の解”と呼ぶ.

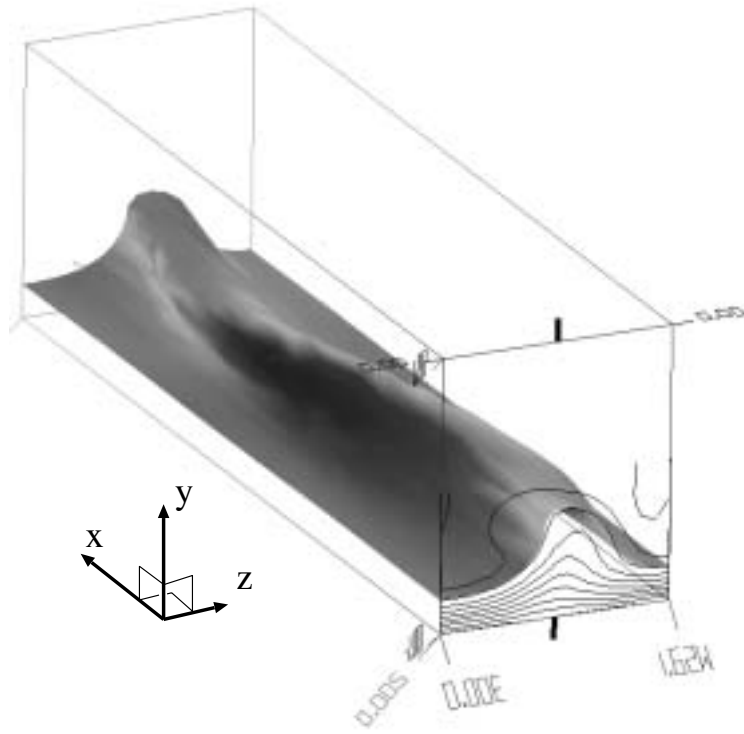


図3  $(Re_P, f_r, \alpha, \gamma) = (1330, 0, 1.00, 1.94)$  におけるチャンネル中の秩序構造の厳密解. 流れ方向速度  $u = 0.50$  の等値面 (灰色) の壁からせりあがった凸部は秩序構造が持つ低速ストリークに対応する. この低速ストリークを跨ぐようにして一対の縦渦構造が存在しており, その影響でストリークは流れ方向に波を打ちながら  $z$  方向の剪断  $(\partial_z \bar{U})$  を保持している. 見やすくするために全計算領域のうち上半分 ( $y > 0$ ) は可視化していないが, 全く対称な構造が計算領域の上半分にも存在している. 図中, 右にスパン方向, 上に壁に垂直方向, 紙面奥 (左上) に向かって流れ方向.

$(Re_P, f_r, \alpha, \gamma) = (1330, 0, 1.00, 1.94)$  における Waleffe の解を流れ方向速度  $u$  の等値面をもちいて可視化した結果を図3に示す.

#### 4 階層的構造

今, スパン方向に幅  $L_z$  をもつ計算領域に対して解が満たすべき方程式と対称性の組を  $\mathcal{F}_{L_z, f_r}[\cdot] = 0$  と表し, またこの方程式から得られた解を  $\mathcal{X}_\gamma(z)$  と表すことにする. 解が方程式と対称性を満たしていることは, 形

式的に次のように表現することができる.

$$\mathcal{F}_{L_z, 0}[\mathcal{X}_\gamma(z)] = 0.$$

上の式で  $\mathcal{X}_\gamma(z)$  の部分には, たとえば Waleffe の解を代入してもよいが, 一般的には, その他の場を代入してもそれが解である限り式は成立する. これまでの計算ではスパン方向に周期境界条件を課していることから, 上で求められた  $f_r = 0$  における Waleffe の解は, スパン方向に幅  $L_z = 2\pi/\gamma$  の計算領域における解であると同時に, 倍の幅  $2L_z = 4\pi/\gamma$  を持つ計算領域における解でもある. このことを先の標識を用いて表すと次のようになる.

$$\mathcal{F}_{2L_z, 0}[\mathcal{X}_\gamma(z + L_z/2)] = 0,$$

$$\mathcal{F}_{2L_z, 0}[\mathcal{X}_\gamma(z)] = 0.$$

課される対称性からスパン方向の位相変化としては, 独立な  $0$  と  $\pi$  の二つが可能である点に注意する必要がある.  $2L_z$  の幅をもつ計算領域に対するこれらの解は, ニュートン法を用いることにより  $f_r \neq 0$  へ接続することができる.

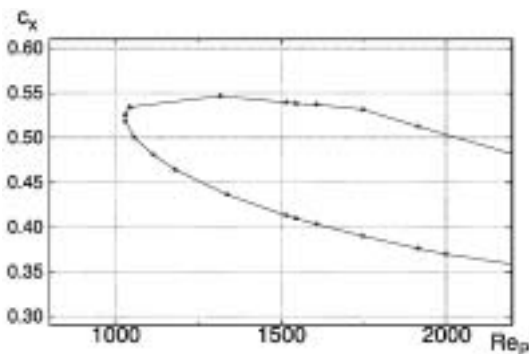


図2  $(f_r, \alpha, \gamma) = (0, 1.00, 2.60)$  の場合の解の分岐図. 横軸に  $Re_P$ , 縦軸に解の流れ方向の位相速度  $c_x$  をとった.

$$\mathcal{F}_{2L_z, f_r}[\mathcal{X}'] = 0, \tag{1}$$

$$\mathcal{F}_{2L_z, f_r}[\mathcal{X}'''] = 0, \tag{2}$$

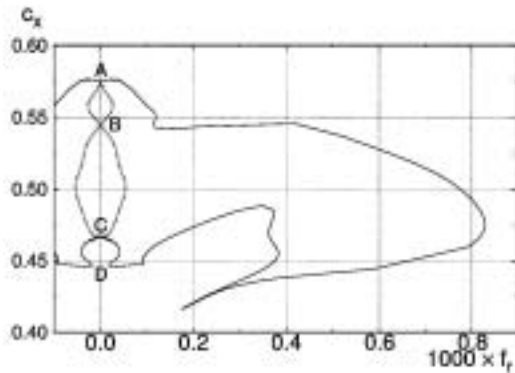


図4 スパン方向に幅  $L_z = 1.617$  をもつドメイン内で得られた解をもとに得られたスパン方向に倍の幅 ( $L_z = 3.233$ ) のドメイン中における分岐.  $(\text{Re}_P, \alpha, \gamma) = (1517, 1.00, 3.88)$  は固定. 図の横軸は  $1000 \times f_r$ 、縦軸は構造の位相速度. 実線は  $\mathcal{X}_\gamma(z)$  (DD2), 点線は  $\mathcal{X}_\gamma(z + L_z/2)$  (DD1) に相当する.

ただしニュートン法を始める初期で

$$\lim_{f_r \rightarrow 0} \mathcal{X}' = \mathcal{X}_\gamma(z + L_z/2),$$

$$\lim_{f_r \rightarrow 0} \mathcal{X}'' = \mathcal{X}_\gamma(z).$$

$f_r$  を変化させた時の二つの解  $\mathcal{X}'$ ,  $\mathcal{X}''$  の分岐を追うと、解は複雑な振舞を示しながらも  $f_r = 0$  面を再び横断することがある. この横断点は、スパン方向に元の解の周期の倍の幅  $2L_z$  を持つ計算領域における仮想外力が存在しない場合の解、すなわち我々が通常考えるチャンネル流の新たな厳密解に対応する.

本手法によって新しい厳密解を得た過程を具体的に図4を用いて説明しよう. 図には  $(\text{Re}_P, f_r, \alpha, \gamma) = (1517, 0, 1.00, 3.88)$  で得られた解を系  $(\text{Re}_P, f_r, \alpha, \gamma) = (1517, 0, 1.00, 1.94)$  の  $f_r = 0$  における解として用い、徐々に  $f_r$  を変化させたときに接続する解を  $(f_r, c_x)$  面上に描いた. 縦軸 ( $f_r = 0$ ) に関する鏡像対称性は、解が  $f_r$  の符号に対称であることからの帰結である.  $\text{Re}_P = 1517$  では縦軸 ( $f_r = 0$ ) 上に3つの解が存在していることが分かる.  $f_r = 0$  上にある最も  $c_x$  が大きい解(点A)と小さい解(点C)は既に求められている  $(\alpha, \gamma) = (1.00, 3.88)$  における Waleffe の解の倍周期分に相当する. 式(1)を用いて、たとえば点Aから  $f_r \neq 0$  に接続した解曲線(図中の点線)は点Bで  $f_r = 0$  を横断した後、点Cに到達する. 点Bに対応する流れ場は、本手法により新たに得られた解、 $f_r = 0$  のチャンネル流の厳密解である. 点Bのように、式(1)による接続で得られた解を DD1 と呼ぶことにする. ここには示されていないが、式(2)を用いて  $f_r \neq 0$  に接続した解曲線(図中の実線)はレイノルズ数の増加に伴い複雑化し、 $\text{Re}_P \approx 1550$  で点D付近で  $f_r = 0$  を二度横断するようになる. この横断点を以下では DD2 と呼ぶことにする.

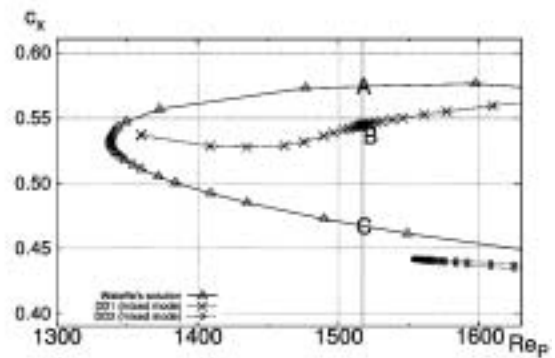


図5  $(f_r, \alpha, \gamma) = (0, 1.00, 1.94)$  の場合の解の分岐図. 横軸に  $\text{Re}_P$ 、縦軸に解の流れ方向の位相速度  $c_x$  をとった. 図中実線で表されている Waleffe の分岐は  $(f_r, \alpha, \gamma) = (0, 1.00, 3.88)$  の場合の解である. 図中の  $\text{Re}_P = 1517$  の線と A,B,C の文字は図4に一致する.

仮想外力のないチャンネル流中の解 DD1 と DD2 の  $\text{Re}_P$  に対する分岐図が図5に示されている. パラメータ空間すべての調査には長い時間がかかるため、今回調査した範囲は  $(\alpha, \gamma) = (1.00, 1.94)$  のみに絞った. 参考のため Waleffe の解の分岐が図中では  $\Delta$  で繋がった曲線として示されている. 図からは DD1 が  $\text{Re}_P = 1330$  付近から、DD2 が  $\text{Re}_P = 1550$  付近から、各々分岐しているのがみてとれる. DD2 の位相速度は同じレイノルズ数における Waleffe の解の位相速度に比べて小さい. 図4からも容易に想像がつくように、DD1 は転回点付近で Waleffe の解から分岐していると考えられるが、その分岐点近傍では解の位相を固定する際に必要な変数の数値的な相対誤差が無視できなくなるため、现阶段では Waleffe の解への接続を十分な精度では求められなかった.

なお図上では Waleffe の解からの分岐が DD1 の場合は一見すると1本しか存在しないように見えるが、正確には異なる2本の解曲線の重なりで構成されていることに注意しなければならない. 事実、図4から分かるように、点Bは  $f_r$  が正から負へと変化する曲線上の交差点と、負から正へと変化する曲線上の交差点の二つが重なった点である. 同様のことが DD2 についても言える.

## 5 結言

Waleffe(2003)<sup>15)</sup>とは異なる接続法を用いてチャンネル流中の厳密解を求めた. 厳密解が内包する秩序構造は、三次元的に流れ方向に波をうつ低速ストリークとそれを跨ぐように存在する一対の縦渦からなる. 本手法により得られたチャンネル流の定常進行波解は結果的に Waleffe(2003) の厳密解に一致すると考えられた. Waleffe が用いた接続法においてはクエット流れからチャンネル流れへの接続や境界条件の変更に関する接続など多段の

接続手続きを要したのに対し、本手法ではこのような接続手続きを簡略化することができ比較的容易にチャンネル流の進行波解を得ることができた。さらに今回用いた接続法を拡張することによりスパン方向に Waleffe の解の倍の周期をもつ分枝を求めることができた。

今回新しく得られた解(DD1,DD2)は数学的には Waleffe の解の倍周期分岐解にすぎないが、以下に示すように特に DD2 について場の可視化から物理的に興味深いことが分かる。今、流れ場をスパン方向の各フーリエ成分に分解することを考え、 $\hat{u}_{k_z}(x, y)$  を以下のように定義する。

$$\hat{u}_{n_z}(x, y, z) = \frac{1}{L_z} \sum_{n'_z = \pm n_z} \int_0^{L_z} u(x, y, z') e^{in'_z \gamma(z-z')} dz'.$$

$(Re_P, f_r, \alpha, \gamma) = (1553, 0, 1.00, 1.94)$  における DD2 解の可視化図として、 $\hat{u}_1(x, y, z) = -0.01$  と  $\hat{u}_2(x, y, z) = -0.1$  の等値面を図 6 に示す。DD2 解には、 $\hat{u}_2$  に対応する図中の濃い等値面で表されているように低速ストリークに対応する構造が上下の壁面近傍に二つずつ存在している。ここでは省略するが、可視化からほぼ同様の構造が DD2 解の接続元である Waleffe の解にも存在する。一方、DD2 解は Waleffe の解にはない波数  $\gamma$  の摂動成分も含んでいるが、その摂動成分の低速領域は図中で薄い等値面として表されている。興味深いことに、波数  $2\gamma$  の低速ストリークの構造に比べ、この摂動成分がもつ低速領域の中心部は壁からやや離れた所に位置している。得られた倍周期分岐解を、チャンネル中に二つの異なる長さスケールの構造を同時に持つ定常進行波解と捉えるならば、解が持つ二つのスケールに対応する流れの構造は、低いレイノルズ数に発生の起源をもつ大規模構造<sup>20, 21)</sup>と壁近傍構造にも関連があると推測することができる。したがって、今回新しく見つかった DD2 解が有する大スケールの構造やそれによって変形を受ける小スケールの構造と、従来の計算から得た構造との形態学的な比較は大変興味深い課題である。比較から類似点が見つければ、壁近傍構造がスパン方向に複数並ぶことで起きる倍周期の摂動に対する不安定性と大規模構造の発生機構<sup>13)</sup>の間の因果関係についてもなんらかの定量的な根拠が得られる可能性がある。大規模構造が壁近傍領域で果たす役割についても理解が進むと期待される。

分岐解析から得られる周期解・進行波解が有する秩序構造と、直接数値計算から得られる壁近傍の秩序的な流れのパターンの間の相似性については次のような問題点が残されている。チャンネル乱流において壁から離れた領域にまで乱流状態が発達すると、剪断は壁近傍に集中し、チャンネル中央部分では秩序的な流れのパターンは壁近傍領域に比べて、同定が難しくなる。実際、Waleffe の

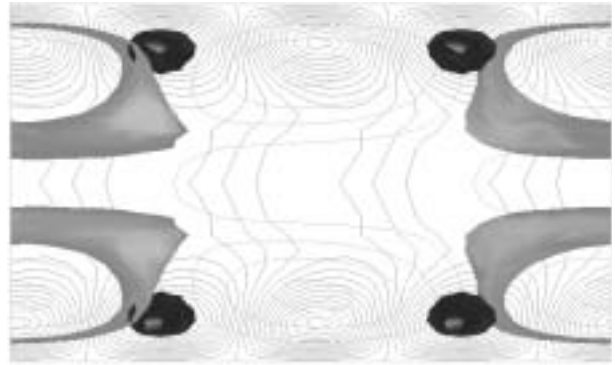


図 6  $(Re_P, f_r, \alpha, \gamma) = (1553, 0, 1.00, 1.94)$  におけるサブハーモニックな分枝 DD2 の可視化図。横軸に  $z$  ( $0 \leq z < L_z$ )、縦軸に  $y$  ( $-1 \leq y \leq 1$ ) をとり、薄い灰色の面は  $\hat{u}_{k_z=1}(x, y, z) = -0.01$  の等値面、濃い灰色の面は  $\hat{u}_{k_z=2}(x, y, z) = -0.1$  等値面に対応する。また細い曲線は  $\hat{u}_{k_z=1}(0, y, z)$  と  $\hat{u}_{k_z=1}(0, y, z)$  の等高線である。

解にも見られるように、単純な分岐解析から得られる進行波解内のストリーク構造は、同じ大きさの計算領域の直接数値計算から得られる乱流中のストリーク構造に比べ、壁から比較的離れた領域まで乱れることなく形成される。河原らが求めた解においては、秩序構造はチャンネルの中央を越えて反対側の壁にまで発達するが、これは低レイノルズ数の平板クエット流が、その全計算領域を持って壁乱流の壁近傍領域を模擬しているからだと説明できる。このように流れ方向に同じ圧力勾配の下で、発達した乱流の直接数値計算から得る流れ場と、本研究のような分岐解析から得る進行波解とを比較したならば、解が内包する渦構造や乱れが壁近傍領域に与える影響の大きさには開きがあり、流れ方向の流量さえも同じ値にはならないであろう。

実験で得られる乱流場との比較では、分岐解析の流れ場との解離の傾向はさらに強まることが容易に予想される。分岐解析から得られる進行波解に比べて、実験では壁から遠方の領域に大小様々な渦構造や乱れが多く存在し、壁近傍の流れ場は複雑な変形を受け、ストリーク構造や縦渦構造といった壁近傍の秩序構造も容易には観察されない<sup>22)</sup>。このように壁乱流はそもそも数個の渦構造が壁近傍に張りついているだけではなくて、多くの渦構造が壁から階層をなして成り立っているということは、従来からよく知られてきた事実である。発達した乱流における平均流速プロファイルも、壁から積み重なるように形成されるこれらの渦構造の階層性と大いに関係があるであろう。こういった観点から、複数の渦構造をチャンネル内に内包した厳密解を分岐解析を用いて求めることは、実験と数値解析との比較と言う面でも興味深い課題である。

なお本研究を進めるに際し、T.I. は文部科学省 21 世紀

COE プログラム「動的機能機械システムの数理モデルと設計論」—複雑系の科学による機械工学の新たな展開—により援助を受けた。ここに謝意を表す。

### 引用文献

- 1) Kawahara, G. & Kida, S.: Periodic motion embedded in plane Couette turbulence: regeneration cycle and burst , *J. Fluid Mech.* **449** (2001) 291–300.
- 2) Jiménez, J. & Moin, P.: The minimal flow unit in near-wall turbulence, *J. Fluid Mech.* **225** (1991) 213–240.
- 3) Hamilton, J.M., Kim, J. & Waleffe, F.: Regeneration mechanisms of near-wall turbulence structures, *J. Fluid Mech.* **287** (1995) 317–348.
- 4) Waleffe, F.: On a self-sustaining process in shear flows , *Phys. Fluids* **9** (1997) 883–900.
- 5) Itano, T. & Toh, S.: The Dynamics of Bursting Process in Wall Turbulence , *J. Phys. Soc. Japan* **70 – 3** (2001) 703–716.
- 6) Busse, F.H.: Bounds for turbulent shear flow, *J. Fluid Mech.* **41** (1970) 219–240.
- 7) Abe, H., Kawamura, H. & Matsuo, Y.: Direct numerical simulation of a fully developed turbulent channel flow with respect to Reynolds number dependence, *Trans. ASME J. Fluids Eng.* **123** (2001) 382–393.
- 8) Lee, M.J. & Kim, J.: The structure of turbulence in a simulated plane Couette flow , *Proc. 8th Symposium on turbulent shear flows* (1991) 5–3.
- 9) Miyake, Y., Kajishima, T. & Obana, S. Direct numerical simulation of plane Couette flow at transitional Reynolds number, *JSME Int. J.* **30** (1987) 57–65.
- 10) Jiménez, J.: The largest scales in the turbulent wall flows , *Center for Turbulence Research Annual Research Briefs* (1998) 137–154.
- 11) Del Álamo, J.C. & Jiménez, J.: Direct numerical simulation of the very large anisotropic scales in a turbulent channel, *Center for turbulence Research Annual Research Briefs* (2001) 329–341.
- 12) Del Álamo, J.C. & Jiménez, J.: Spectra of the very large anisotropic scales in turbulent channels, *Phys. Fluids* **15** (2003) L41–44.
- 13) Toh, S. & Itano, T. : Interaction between a large-scale structure and near-wall structures in channel flow , *J. Fluid Mech.* **524** (2005) 249–262.
- 14) Waleffe, F.: Exact Coherent Structures in Channel Flow , *J. Fluid Mech.* **435** (2001) 93–102.
- 15) Waleffe, F.: Homotopy of exact coherent structures in plane shear flows , *Phys. Fluids.* **15(6)** (2003) 1517–1534.
- 16) Schaeffer, D.G.: Qualitative analysis of a model for boundary effect in the Taylor problem, *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.* **87** (1980) 307–337.
- 17) Nagata, M.: Three-dimensional finite-amplitude solutions in plane Couette flow : bifurcation from infinity , *J. Fluid Mech.* **217** (1990) 519–527.
- 18) Wedin, H. & Kerswell, R.R. Exact coherent structures in pipe flow : travelling wave solutions , *J. Fluid Mech.* **508** (2004) 333–371.
- 19) Canute, C., Hussaini, M.Y. , Quarteroni, A., & Zang, T.A.: *Spectral Methods in Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York (1987)
- 20) Toh, S., Itano, T. & Satoh, K. : Co-supporting cycle: Sustaining mechanism of large-scale structures and near-wall structures in channel flow turbulence , *Proc. of IUTAM symposium on laminar-turbulent transition and finite amplitude solutions* (ed. T. Mullin and R. Kerswell, Springer, Dordrecht, 2005) 71–83.
- 21) Waleffe, F. : On the scaling of the lower branch exact coherent states of plane Couette flow , *Proc. of IUTAM symposium on laminar-turbulent transition and finite amplitude solutions* (ed. T. Mullin and R. Kerswell, Springer, Dordrecht, 2005) 85–106.
- 22) Kishida, K., Wells, J. C., Ukai, N., Himeno, Y. & Yamamoto, Y.: Near-wall coherent structures in open-channel flow: Time-resolved stereo PIV measurements in the cross-stream plane, *Proc. of the 8th international symposium on flow modeling and turbulence measurements* (2001)