

[原著論文]

水流に引き上げられる卵，ゴルフボール および球まわりの流れに関する研究 (第1報，臨界流量)

*防衛大学校機械工学科 五十嵐 保†

水を入れたコップに卵を入れ，水道の水を上から注ぐ．流量がある臨界値を越えると，卵はあたかも落下する水に引き込まれるかのように浮き上がる．この現象についてはよくわかっていない．本報では，卵やゴルフボールが浮上する臨界流量を測定した．臨界流量 q_c に関する支配因子は卵等の代表長さ d ，体積 V ，比重 σ ，容器の内径 D と深さ H ，流体の密度 ρ と動粘性係数 ν および重力加速度 g である．方向性次元解析より，臨界流量の無次元関係式 $q_c/d\nu = C(D/d)^k (H/d)^m [(\sigma - 1)Vg/\nu^2]^n$ を得た．定数 C および指数 k ， m ， n は実験より求めた．

An Investigation on the Flow Around an Egg, a Golf Ball and a Sphere Pulled up by Impinging Water Stream (1st Report, Critical Flow Rate)

Tamotsu IGARASHI

Department of Mechanical Engineering, The National Defense Academy

(Received 5 July, 2001 ; in revised form 27 August, 2001)

Let a faucet pour onto an egg sinking in a glass of water. For flow rates above some critical value, the egg will rise as if it were attracted to the falling water. Apparently nothing more than a description has been published on this demonstration. In this paper, this phenomenon was observed and the critical flow rate for an egg, a golf ball and a sphere were measured. The dominating factors on the critical flow rate for the bodies are the reference diameter, value and specific gravity of the egg, d , V and σ , the diameter and depth of the vessel, D and H , the density and kinematic viscosity of fluid, ρ and ν , and the acceleration of gravity, g . From the vector dimensional analysis, the critical flow rate is given by $q_c/d\nu = C(D/d)^k (H/d)^m [(\sigma - 1)Vg/\nu^2]^n$, for an egg, a golf ball and a sphere. The constant C and the exponents k , m and n were obtained experimentally.

(KEY WORDS): Impinging Water Jet, Fluid Dynamics, Fluid Force, Dimensional Analysis, Critical Flow Rate

1 まえがき

最近，中・高校生の理科離れが社会問題となっている．理工系の学科でも物理の講義を理解でき

ない学生が年々増加している．しかし，この兆候は1985年頃より現れていた．著者はその対策として講義の中に身近で簡単な実験を取り入れ，学生の興味と勉学意欲を引き出すよう務めてきた．たとえば，“毛細管から滴下する液滴の質量測定”を扱った「極微量液体の流量計測に関する基礎

* 〒239-0811 横須賀市走水 1-10-20

† E-mail: tigarash@nda.ac.jp

的研究¹⁾や衝突噴流による円盤の浮上を扱った「上壁のある円形衝突噴流により浮上する円盤に働く揚力」²⁻⁴⁾、さらには「静水に浮く角材の姿勢」⁵⁾などはその一例である。

Jearl Walker⁶⁾著、戸田・渡辺共訳の「ハテ・なぜだろうの物理学II」⁷⁾に興味深い現象が載っている。それは「水に引き上げられる卵」である。「水を入れたコップに卵を入れ、水道の水を上から注ぐ。流れがある臨界値を越えると、卵はあたかも落ちてくる水に引き込まれるかのように浮き上がる。なぜだろう。臨界の水流は何によってきまるのだろうか。」と述べられている。この略解は「この実験については、単に現象の報告があるだけでよくわかっていない。卵のすぐ上と下の圧力はどうなっているのだろうか。乱流の影響があるだろうか。」と書かれている。なお、上述の現象はベルヌーイの定理の応用の項の中にある。

本報では、その第一段階として卵、ゴルフボール、球が水流により浮上する現象を観察し、臨界水量を測定した。また、現象の支配因子を次元解析より求め、臨界水量を定式化した。

記号

- a, b : 卵の短径および長径
- D, D_c : 容器の内径, 浮上限界内径
- d : ゴルフボールおよび球の直径
- d_e : 卵の代表長さ = $(a^2 b)^{1/3}$
- d_n : 水流出口の管内径
- F : 物体に働く流体力
- g : 重力加速度
- H, H_c : 容器の深さ, 水深および浮上限界水深
- h : 水流出口と容器との距離
- m : 卵, ゴルフボールおよび球の質量
- q, q_c : 水流の流量および臨界流量
- Q : 水流の無次元流量 = $q/dv, q/d_c v$
- Q_c : 水流の無次元臨界流量 = $q_c/dv, q_c/d_c v$
- V : 卵, ゴルフボールおよび球の体積
- σ : 卵, ゴルフボールおよび球の比重
- μ, ν, ρ : 流体の粘性係数, 動粘性係数および密度
- ρ_0 : 卵, ゴルフボールおよび球の密度

2 実験装置および方法

2.1 卵と球の模型

鶏卵およびゴルフボールの比重は $\sigma = 1.05 \sim 1.08$ および 1.08 である。卵は鶏卵と市販の木製卵の中心部に黄銅ブロックが挿入された模型の2種類を用意した。同様の方法で木製球（比重 $\sigma = 1.05 \sim 1.10$ ）も製作した。なお、ゴルフボールのディンプルにより球の表面粗さの影響を調べることができる。実験模型を図1に示す。

2.2 実験装置および方法

まず、鶏卵と木製卵およびゴルフボールが水流により浮き上がる現象を観察した。卵とゴルフボールの浮き上がりには限界流量が存在し、この限界流量は容器の大きさと水深に依存することが分かった。この結果をふまえ容器の内径 D および深さ H を決定した。卵（短径 a , 長径 b ）の代表直径 d_e およびゴルフボールと球の代表直径 d と物体の体積 V , 質量 m , 比重 σ を表1に示す。なお、水流出口のノズル径 d_n と容器の水面までの高さ h は一定とした。

実験で蛇口のcockを少しずつ開いていくと、卵あるいはゴルフボールが容器の底から浮き上が

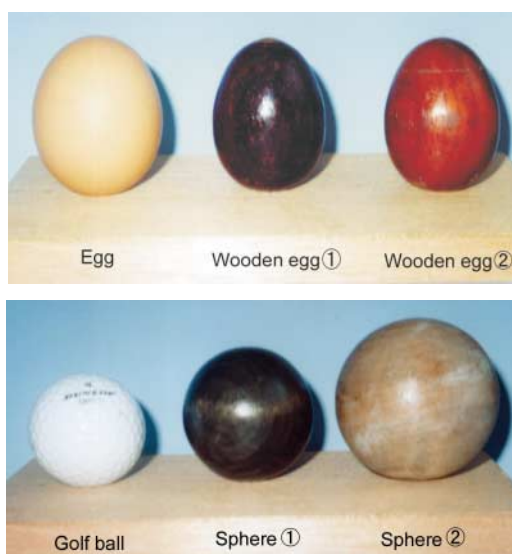


図1 実験模型。上) 鶏卵, 木製卵①, 木製卵②。下) ゴルフボール, 木製球①, 木製球②。

表1 実験模型と実験条件

ノズル: 直径 $d_n = 16\text{ mm}$, 高さ $h = 27.3\text{ cm}$

物体 Body	直径 $d\text{ mm}$	体積 $V\text{ cc}$	質量 $M\text{ g}$	比重 σ	内径 $D\text{ mm}$	水深 $H\text{ mm}$
Egg ①	$a = 40.0$ $b = 53.8$ $d_c = 44.18$	45.0	47.1	1.044	60	60~110
					64	55~110
					74	60~110
Egg ②	$a = 40.0$ $b = 53.8$ $d_c = 44.15$	45.0	48.5	1.078	60	60~110
					64	55~110
					74	60~110
Golfball	42.9	42	45.6	1.086	54	50~80
					60	45~95
					64	45~95
Sphere ①	49.0	61.6	66.5	1.080	54	55~80
					64	55~95
					74	60~110
Sphere ②	58.0	102	108	1.059	64	65~95
					74	70~110
Sphere ③	58.0	102	109.3	1.072	64	65~95
					74	70~110
Sphere ④	58.0	102	111.5	1.094	64	60~95
					74	70~110

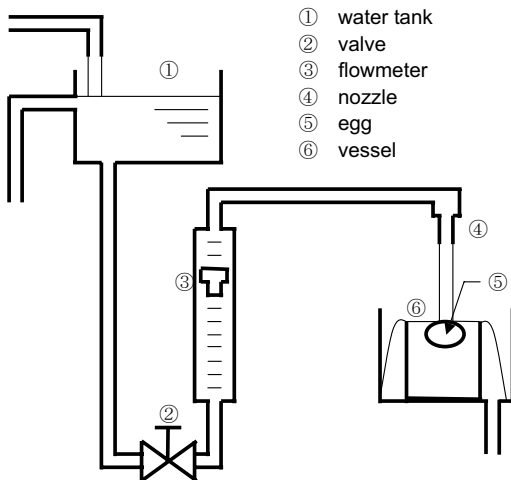


図2 実験装置

る。しかし、水面までは浮上せず水中に漂う。さらに流量をわずかに増加すると、卵あるいはゴルフボールは水面上に浮上する。このときの流量を臨界流量 q_c とする。臨界流量 q_c は次の二つの方法により求めた。一つは図2に示す実験装置の流量計で測定する方法で、測定誤差は2%であった。他の一つは、流しの蛇口を利用しペットボトルに水が1200cc貯まる時間 t を4回測定し、そ

の平均値 \bar{t} から流量 $q_c = 1200/\bar{t}\text{ (cc/s)}$ を決定した。このとき $|\bar{t} - t|/\bar{t} \leq 0.02$ であった。両測定結果に差異はなかった。

3 次元解析

本現象を支配する因子を抽出、方向性次元解析により臨界流量を与える無次元量を見出す。容器の底に代表直径 d (または d_c)、体積 V 、比重 σ の物体が沈んでいる場合、物体に働く流体力 F が物体の水中における重力 $V(\sigma - 1)\rho g$ を上回れば物体は浮上する。ここで、 $(\sigma - 1)$ は水中にある物体に働く浮力(アルキメデスの法則)を考慮した水中比重で、 ρ は水の密度、 g は重力加速度である。水流の臨界流量 q_c に関する他の物理量は容器の内径 D 、深さ H 、さらに水の粘性係数 μ である。浮上物体表面の流れは半径方向と重力方向の二次元と単純化した。質量、長さおよび時間の基本単位は $[M]$ 、 $[Lr]$ 、 $[Lz]$ 、 $[t]$ で表す。関係する物理量は次のとおりである。ただし、流体力 F は後で $(\sigma - 1)V\rho g$ で置き換える。

$$q_c^{\pi_1} d^{\pi_2} D^{\pi_3} H^{\pi_4} F^{\pi_5} \rho^{\pi_6} \mu^{\pi_7} \quad (1)$$

これらの次元はそれぞれ次のように与えられる。

$$[Lr^2Lz/t]^{\pi_1} [Lr]^{\pi_2} [Lr]^{\pi_3} [Lz]^{\pi_4} [MLz/t^2]^{\pi_5} \\ [M/Lr^2Lz]^{\pi_6} [MLz/Lr^2t]^{\pi_7}$$

これが無次元になるためには、基本単位の指数が零になればよく、次式が得られる。

$$Lr : 2\pi_1 + \pi_2 + \pi_3 - 2\pi_6 - 2\pi_7 = 0$$

$$Ly : \pi_1 + \pi_4 + \pi_5 - \pi_6 + \pi_7 = 0$$

$$M : \pi_5 + \pi_6 + \pi_7 = 0$$

$$t : \pi_1 + 2\pi_5 + \pi_7 = 0$$

未知数7個に対し方程式4個であるから、3個の指数 π_1, π_3, π_5 によって他の指数が与えられる。

$$\pi_2 = -(2\pi_1 + \pi_3 + 2\pi_5), \quad \pi_4 = \pi_1 + 2\pi_5,$$

$$\pi_6 = \pi_1 + \pi_5, \quad \pi_7 = -\pi_1 - 2\pi_5$$

上式を式(1)に代入，次の関係が得られる。

$$\left[\frac{q_c/d(\mu/\rho)}{(H/d)} \right]^{\pi_1} \left[\frac{D/d}{H/d} \right]^{\pi_3} \left[\frac{(H/d)^2 F \rho / \mu^2}{(H/d)^2} \right]^{\pi_5}$$

π_1, π_3, π_5 は任意であるから，この3つの無次元量は互いに独立である。第3項の F を $(\sigma-1)Vg\rho g$ で置き換えると括弧内は $(H/d)^2(\sigma-1)Vg/(\mu/\rho)^2$ となる。ここで， μ/ρ は動粘性係数 ν である。

$$\frac{(q_c/d\nu)}{(H/d)} = f \left[\frac{D/d}{H/d}, \left(\frac{H/d}{D/d} \right)^2 (\sigma-1)Vg/\nu^2 \right] \quad (2)$$

ここで， $q_c/d\nu$ は無次元流量， H/d は水深比， D/d は容器の内径比である。なお， $q_c/d\nu$ は五十嵐・大倉²⁾が「上壁のある円形衝突噴流により浮上する円盤に働く揚力（第1報）」で求めた流量に関する無次元量と同一である。この無次元量はレイノルズ数と同じ物理量から構成され，水流の臨界レイノルズ数とも言える。また， $(\sigma-1)Vg/\nu^2$ において体積と比重に $V = (\pi/6)d^3$ ， $\sigma = \rho_o/\rho$ を代入し，書き換える。 ρ_o は物体の密度である。

$$\begin{aligned} (\sigma-1)Vg/\nu^2 &= (\pi/6)(\sigma-1)d^3g/\nu^2 \\ &= (\pi/6)\{(\rho_o-\rho)/\rho\}d^3g/\nu^2 \end{aligned} \quad (3)$$

ここで，上式の $(\sigma-1)d^3g/\nu^2$ は土木工学における流砂の掃流現象⁷⁾を支配する砂粒の特性を表す無次元パラメータで，砂粒レイノルズ数の平方と無次元掃流力との比として表現される。ま

た，物体を水と異なる一種の流体と見なせば， $\{(\rho_o-\rho)/\rho\}d^3g/\nu^2$ の項は自然対流現象におけるグラスホフ数⁸⁾， $Gr = d^3g/\nu^2\{(\rho_o-\rho)/\rho\}$ と同じ物理量である。なお， d^3 は体積 V ， $g(\rho_o-\rho)$ は密度差に伴う浮力に相当する。結局，式(3)は次のように書き換えられる。

$$q_c/d\nu = C(D/d)^k (H/d)^m \{(\sigma-1)Vg/\nu^2\}^n \quad (4)$$

4 現象の観察

鶏卵や木製卵の浮き上がりの観察結果より，容器の大きさが卵の大きさに近いほど卵は容易に浮き上がり，臨界水量が少ない。また容器が浅いほど臨界水量が少ないことがわかった。なお，水道の蛇口が空気の泡が混入される構造の場合，水流は二相流で卵は浮き上がらないこともわかった。

4.1 水流による卵の浮上

卵が水流により浮き上がる様子を図3に示す。写真aの水量が少ないときは卵は容器の底に沈んでいる。水量が増加すると写真bのように卵は浮上し，ついには写真cのように水流に引き寄せられるように水面上に浮き上がる。このとき水面上の卵の上面には水膜流が形成されている。このように卵の浮上には適当な大きさの容器と水深および限界流量が存在する。

ゴルフボール，球でも図4，5に示すように全く同様の現象を観察することができる。

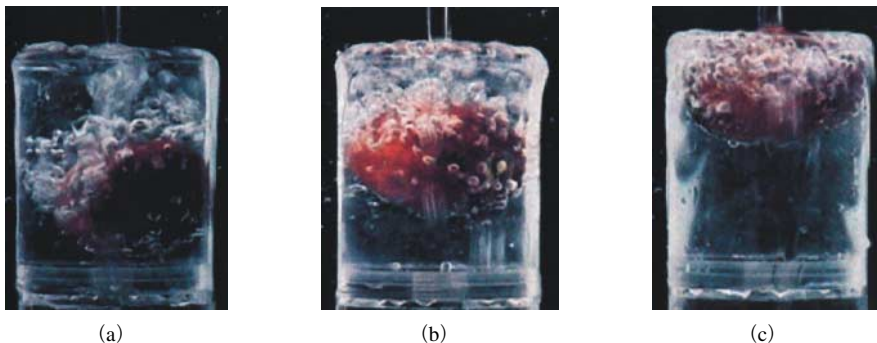


図3 水流による卵の浮上

($a = 40 \text{ mm}$, $b = 53.8 \text{ mm}$, $d_e = 44.2 \text{ mm}$, $D = 64 \text{ mm}$, $H = 75 \text{ mm}$)

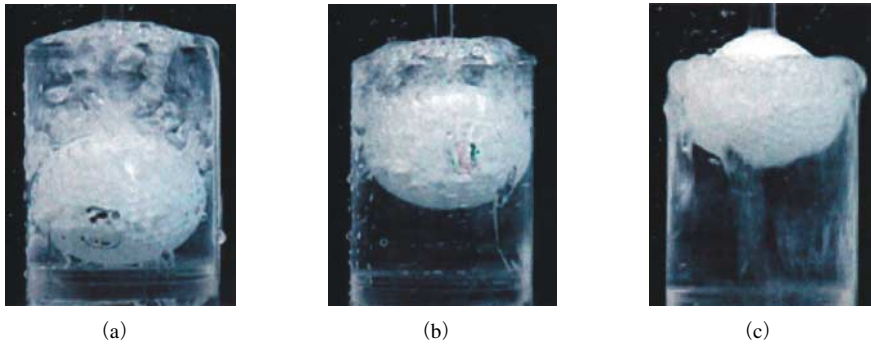


図4 水流によるゴルフボールの浮上
($d = 42.8 \text{ mm}$, $D = 54 \text{ mm}$, $H = 70 \text{ mm}$)

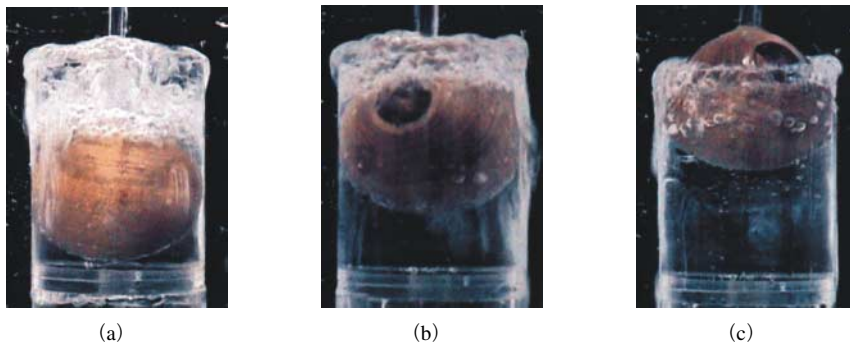


図5 水流による球の浮上
($d = 58 \text{ mm}$, $D = 64 \text{ mm}$, $H = 85 \text{ mm}$)

4.2 臨界流量と流れ場の安定性

流量が臨界値よりやや下回ると卵やゴルフボールは水面下に漂う。卵, ゴルフボールの大きさが容器の内径に近いほど限界流量は少なく, かつ流れ場は安定である。容器内径が大きくなると, 物体と容器内壁との隙間が大きくなるため流れ場は不安定となり, 浮体は内壁にぶつかり不規則運動し, 水面まで浮上しない。このことは容器内径にも限界値が存在することを示唆している。また, 容器の深さにも限界値が存在すると思われる。試しにメスシリンダーにゴルフボールを入れて実験したところ, ゴルフボールは直径の8倍以上の水深でも水面上まで浮上した。したがって, 水深の影響は内径の影響に比べ少ないと思われる。

4.3 容器の浮上限界内径と限界深さ

水流の流量を増加させても浮き上がらない容器の限界内径と容器内径に対応した水深の限界値を

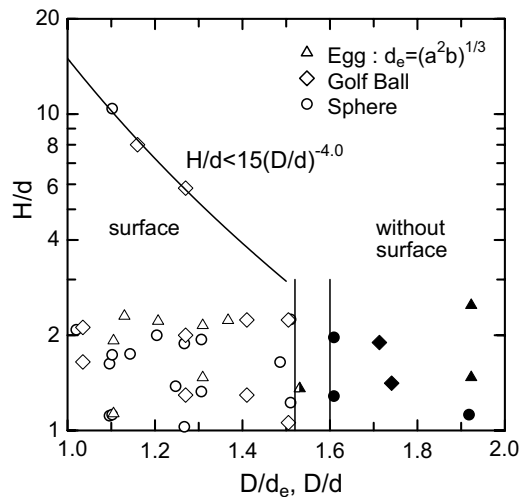


図6 容器の浮上限界内径と水深との関係

調べた。得られた結果を卵等が容器の底に止まる場合, 底から浮上し水面下で浮遊する場合, 水面上まで浮上する場合に分けて図6に示す。容器の

内径 D が卵の代表直径 d_e 、ゴルフボールおよび球の直径 d の 1.6 倍以上では全く浮上せず、1.5 ~ 1.6 倍では浮遊し、1.5 倍以下で浮上した。容器の限界内径 D_c はほぼ次式で与えられる。

$$D_c/d_e, \quad D_c/d = 1.5 \quad (5)$$

ここで、卵の代表直径 d_e は卵の短径 a 、長径 b のとき、次式で与えた。卵の体積の実測値 V と球換算の体積 $\pi d_e^3/6$ との最大誤差は 2% であった。

$$d_e = (a^2 b)^{1/3} \quad (6)$$

容器の深さに関し、容器内径が物体の直径に近いほど浮上限界深さ H_c は増大している。容器内径比 $D/d = 1.42$ では限界深さは $H_c/d = 3.71$ 、内径比 $D/d = 1.1$ では $H_c/d = 10$ 以上である。浮上限界深さは次式で与えられる。

$$H_c/d = 15(D/d)^{-4.0} : (D/d \leq 1.5) \quad (7)$$

5 実験結果および考察

5.1 卵、ゴルフボールの臨界流量

木製卵の臨界流量を求めた。卵を球に換算したときの代表直径 d_e は式(6)で与えられる。得られた結果を図 7 に示す。図 7 (a) に示す臨界流量に及ぼす水深の影響は比較的少ない。

$$q_c \propto (H/d_e)^{0.18} \quad (8.a)$$

ここで、先述の無次元臨界流量 $Q_c = q_c/d_e \nu$ を用い、容器内径の影響を調べる。図 7 (b) に示す $Q_c/(H/d_e)^{0.18}$ と容器直径比 (D/d_e) の間に次の関係が得られる。

$$Q_c/(H/d_e)^{0.18} \propto (D/d_e)^{4.0} \quad (8.b)$$

さらに図 7 (c) に示す浮力項との関係が得られる。

$$Q_c / \left[(H/d_e)^{0.18} (D/d_e)^{4.0} \right] \propto [(\sigma - 1)Vg/\nu^2]^{0.75} \quad (8.c)$$

結局、卵の臨界流量は次式で与えられる。

$$Q_c = 1.79 \times 10^{-4} \times (H/d_e)^{0.18} (D/d_e)^{4.0} [(\sigma - 1)Vg/\nu^2]^{0.75} : (D/d_e < 1.5, H/d_e < 2.5, 1.0 < \sigma < 1.1) \quad (9)$$

上記推奨式と実験値との比較を図 8 (a) に示す。両者の誤差は $\pm 4\%$ 以内である。図 8 (b) に示す鶏卵の実験結果と推奨式との誤差は $\pm 8\%$ 以内である。

次にゴルフボールの実験結果を図 9 (a), (b) に示す。図 9 (a) から明らかなように臨界流量 Q_c に対する水深 (H/d) の依存性は $Q_c \propto (H/d)^{0.13}$ である。図 9 (b) より容器内径比の影響は次式で与えられる。

$$Q_c/(H/d)^{0.13} \propto (D/d)^{3.5} \quad (10)$$

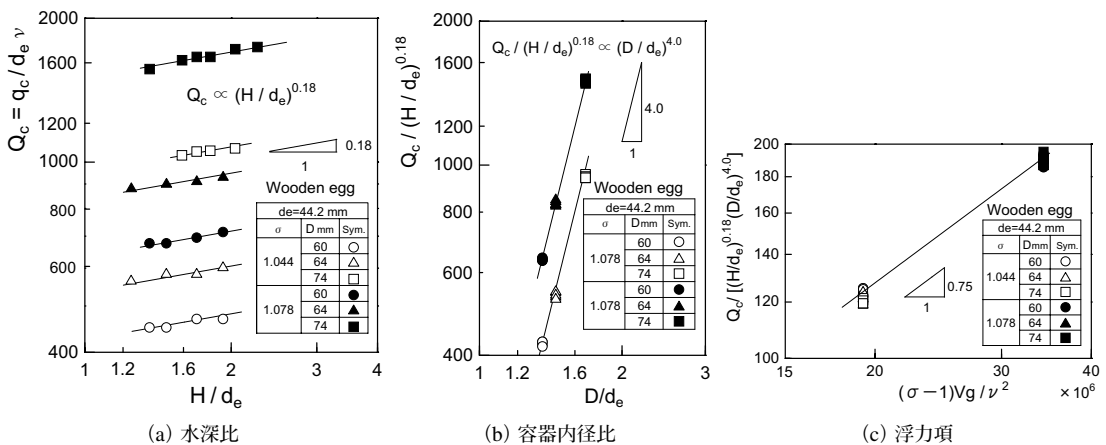


図 7 卵の臨界流量に及ぼす水深比、容器内径比および浮力項の影響

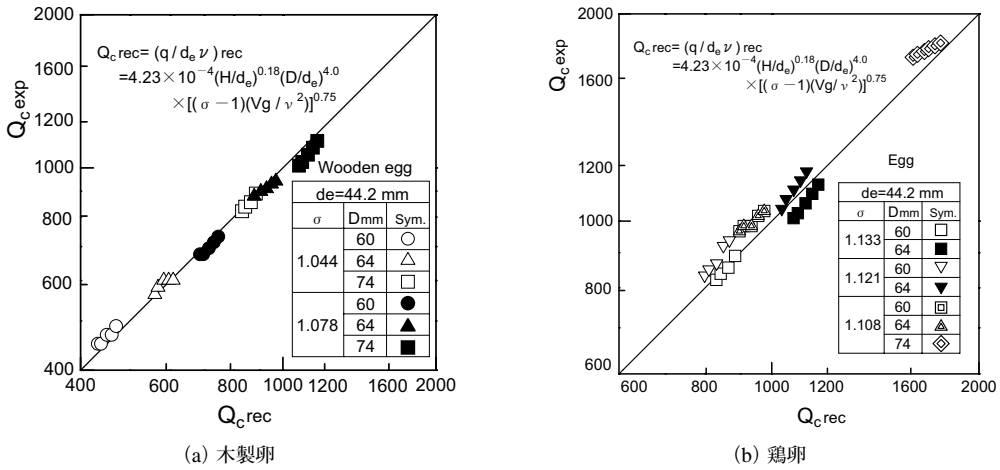


図8 卵の臨界流量：推奨式と実験値の比較

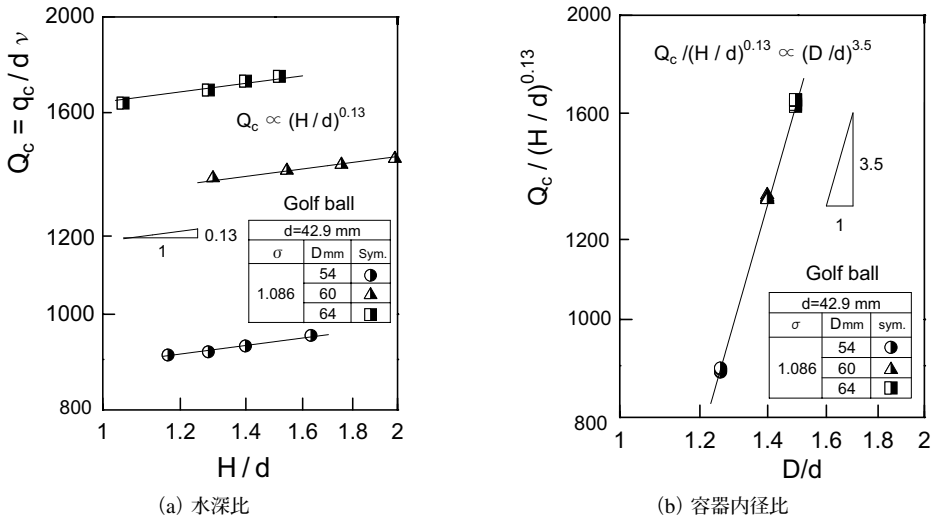


図9 ゴルフボールの臨界流量に及ぼす水深比と容器内径比の影響

なお、浮力項の影響はパラメータを変えられないので後述の球と同一の $Q_c \propto [(\sigma - 1)Vg/v^2]$ と見なす。ゴルフボールの臨界流量は次式で与えられる。

$$Q_c = q_c/dv = 9.5 \times 10^{-6} (H/d)^{0.13} (D/d)^{3.5} \times [(\sigma - 1)Vg/v^2]$$

$$: (D/d < 1.5, H/d < 1.9, \sigma = 1.086) \quad (11)$$

図10より上式と実験値の誤差は±2.5%以内である。

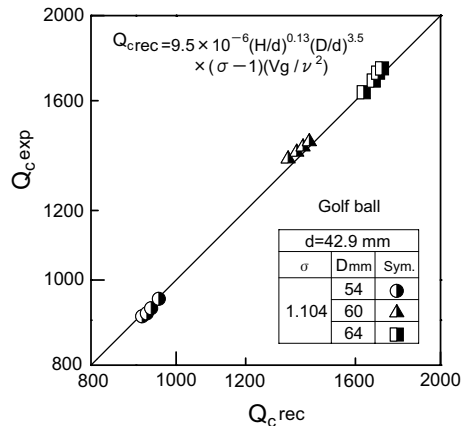


図10 ゴルフボールの臨界流量推奨式

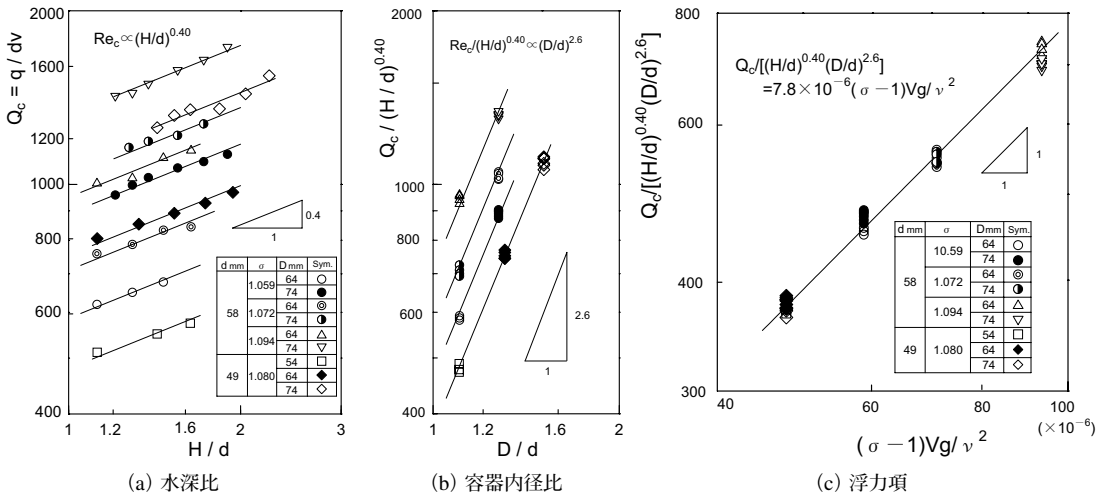


図 11 球の臨界流量に及ぼす水深比, 容器内径比および浮力の影響

5.2 球の臨界流量

球の臨界流量に関する実験結果を図 11 (a) ~ (c) に示す. 図 11 (a) に示すように臨界流量は水深と次の関係にある.

$$Q_c = q_c/dv \propto (H/d_c)^{0.40} \quad (12.a)$$

次に $[q_c/dv]/(H/d)^{0.40}$ と容器内径比 (D/d) の関係を図 11 (b) に示す. 両者の間には次の関係がある.

$$[q_c/dv]/(H/d)^{0.40} \propto (D/d)^{2.6} \quad (12.b)$$

さらに, 無次元浮力 $(\sigma-1)Vg/v^2$ との関係を図 11 (c) に示す. 次式が得られる.

$$[q_c/dv]/[(H/d)^{0.40} (D/d)^{2.6}] \propto (\sigma-1)Vg/v^2 \quad (12.c)$$

結局, 球の無次元臨界流量は次式で与えられる.

$$Q_c = q_c/dv = 7.8 \times 10^{-6} (H/d)^{0.40} (D/d)^{2.6} \times [(\sigma-1)Vg/v^2] \quad (13)$$

: $(D/d < 1.5, H/d < 2.5, 1.0 < \sigma < 1.1)$

図 12 に示すように上式と実験値との誤差は $\pm 4\%$ 以内である.

次にゴルフボールのディンプルの影響を調べるため, ゴルフボールと同じ比重と大きさの球を想定

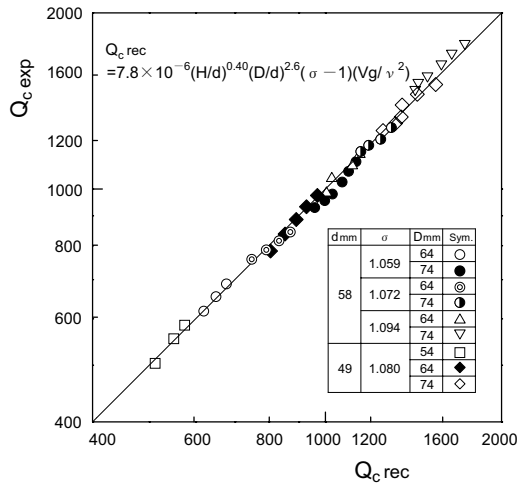


図 12 球の臨界流量: 推奨式と実験値の比較

する. 容器内径 $D/d = 1.2, 1.4$, 深さ $H/d = 1.6$ のとき, 両臨界流量 Q_c を式(7), (9)より計算し $Q_{c \text{ golf}}/Q_{c \text{ sphere}}$ を求める. ゴルフボールの臨界流量は球に比べ $D/d = 1.2$ では 32%, $D/d = 1.4$ では 45% も大きい. これは次のように考えられる. 水流が水面下のゴルフボールに到達し, ボールの上半面に沿う壁面噴流となる. この噴流はボール表面のディンプルにより乱流となり, はく離が遅れはく離領域が狭くなる. ゴルフボール下面側の圧力が減少し, ボールに働く揚力が減少するためと考えられる.

6 結論

水流により容器内の卵, ゴルフボールおよび球が浮き上がる臨界流量を測定した.

(1) 容器の底に沈んだ卵等は水流の流量がある臨界値を越えると浮上する. 短径 a , 長径 b の卵の代表長 $d_c = (a^2 b)^{1/3}$ や球の直径 d が容器内径に近いほど, 水深が浅いほど臨界流量 q_c は小さい.

(2) 物体が浮上する容器の限界内径は $D_c/d = 1.5$ である. 容器内径 $D/d > 1.6$ では流量を増加させても, 物体は浮上しない. $D/d = 1.5 \sim 1.6$ では流れ場は不安定で浮体は内壁に衝突し不規則運動をする.

(3) 臨界流量 q_c に関する支配因子は次の4つである. 無次元臨界流量 $Q_c = q_c/dv$, 容器内径および水深と物体直径との比 D/d と H/d , 物体に働く無次元浮力 $(\sigma - 1)Vg/v^2$ である. ここで, σ は物体の比重, $(\sigma - 1)$ は水中比重, V は体積である.

(4) 卵, ゴルフボールおよび球の臨界流量 q_c は, それぞれ式(a), (b), (c)で与えられる.

$$q_c/d_e v = 1.79 \times 10^{-4} (H/d_e)^{0.18} (D/d_e)^{4.0} \times [(\sigma - 1)Vg/v^2]^{0.75} \quad (\text{a})$$

$$q_c/dv = 9.6 \times 10^{-6} (H/d)^{0.13} (D/d)^{3.5} \times [(\sigma - 1)Vg/v^2] \quad (\text{b})$$

$$q_c/dv = 7.8 \times 10^{-6} (H/d)^{0.40} (D/d)^{2.6} \times [(\sigma - 1)Vg/v^2] \quad (\text{c})$$

ただし, 適用範囲は $D/d < 1.5$, $H/d < 2.5$, $1.0 < \sigma < 1.1$ で, 上式と実験値との誤差は $\pm 4\%$ 以内である.

終りに, 本実験にご協力いただいた当時本学学生の佐藤敦茂君, 峰松浩一君, 芝慶彦君, および実験模型の製作にご協力いただいた本学実習工場の石渡信司技官に謝意を表します.

引用文献

- 五十嵐保, 稲垣進, 西田幸造: 極微量液体の流量計測に関する基礎的研究, 日本機械学会論文集 **56-523**, B (1990) 719-723.
- 五十嵐保, 大倉達也: 上壁のある円形衝突噴流により浮上する円盤に働く揚力(第1報, 臨界流量), 日本機械学会論文集 **66-642**, B (2000) 368-373.
- 五十嵐保, 大倉達也: 上壁のある円形衝突噴流により浮上する円盤に働く揚力(第2報, 圧力分布と揚力), 日本機械学会論文集 **66-648**, B (2000) 2042-2048.
- 五十嵐保, 大倉達也: 上壁のある円形衝突噴流により浮上する円盤に働く揚力(第3報, 小円盤の場合), 日本機械学会論文集 **67-657**, B (2001) 1162-1169.
- 五十嵐保: 静水に浮く角材の姿勢, 日本流体力学会誌, ながれ **19** (2000) 253-262.
- Jearl Walker: *The Flying Circus of Physics with Answers* (John Willey & Sons, Inc., 1977) 81, 253.
- J. ウォーカー著: 戸田盛和, 渡辺慎介共訳, ハテ・なぜだろうの物理学II (培風館, 1980) 83-84 および 185-186.
- 中川博次, 辻本哲郎: 土木学会編, 新体系土木工学 23, 移動床流れの水理 (技報堂出版, 1994) 25.
- 甲藤好郎: 伝熱概論 (養賢堂, 1964) 53.